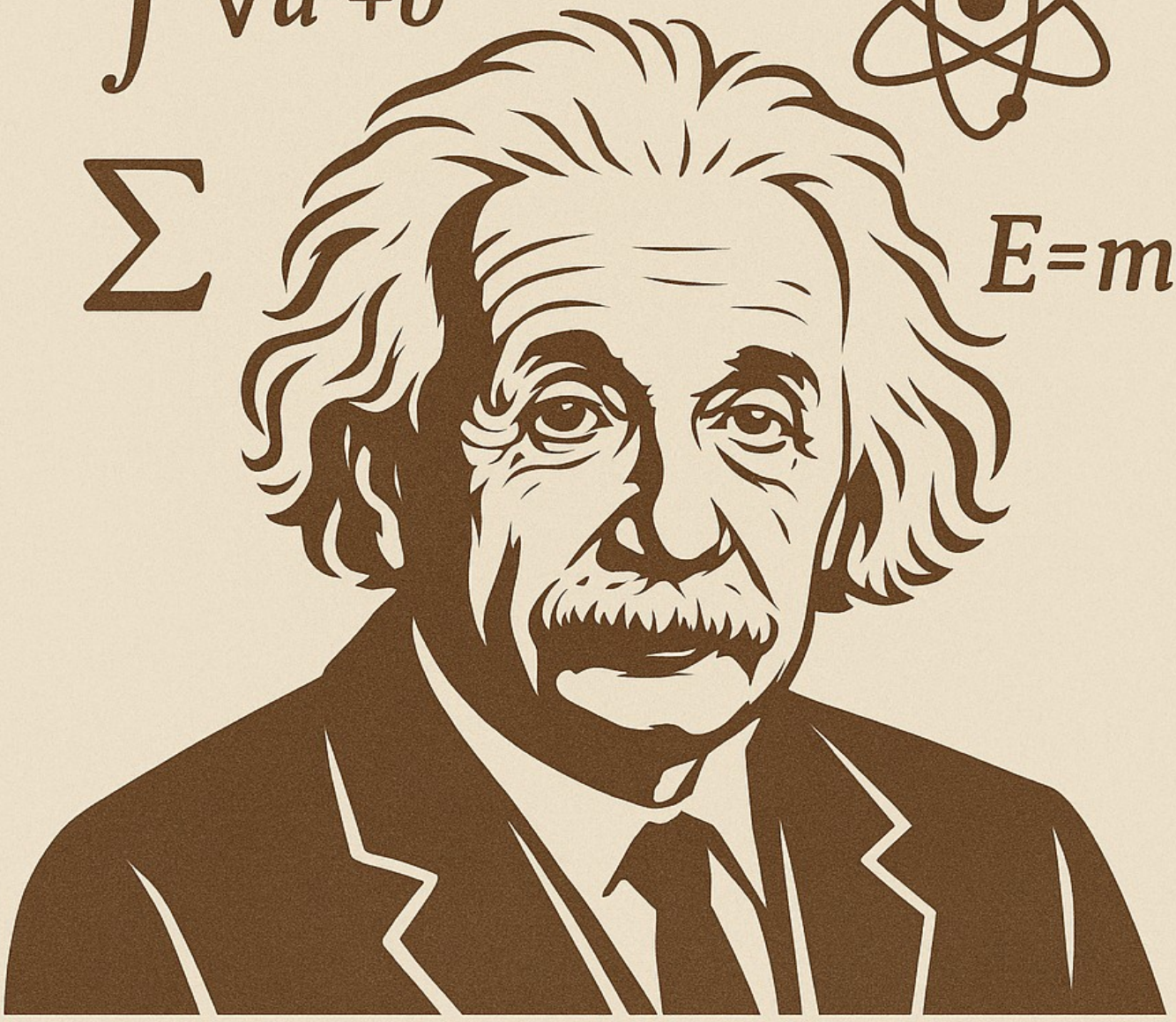
MATEMÁTICAS

v. 2

$\int \sqrt{a^2+b^2}$

$\sum$

$E=mc^2$



LUIS MINGUILLÓN PASCUAL

Matemáticas v. 2

Luis Minguillón Pascual

COPYRIGHT

La licencia de este libro electrónico es para uso personal. Por lo tanto no puedes revenderlo a otras personas.

Gracias por respectar los derechos de autor.

©Luis Minguillón Pascual
03/08/2025

Epílogo

A lo largo de las páginas de este libro hemos recorrido los senderos fundamentales de las matemáticas, una disciplina que no solo construye el pensamiento lógico y riguroso, sino que también se encuentra entrelazada con cada aspecto de nuestra vida cotidiana. Desde calcular el cambio en una tienda hasta planificar nuestro tiempo, interpretar datos o comprender el mundo que nos rodea, las matemáticas son una herramienta esencial para vivir con autonomía y sentido crítico.

Pero más allá de su utilidad práctica, este libro ha sido también una celebración del conocimiento como acto de libertad. Compartir lo que sabemos es un gesto profundamente humano; es extender una mano al que viene detrás, es abrir puertas, es romper cadenas de ignorancia. Porque el saber nos hace libres: nos libera del miedo a lo desconocido, nos empodera para tomar decisiones y nos conecta con los demás a través del entendimiento.

En este camino de escritura, no puedo dejar de recordar a quien encendió en mí la chispa por esta ciencia exacta: mi profesor de matemáticas, D. Mateo. Su forma de enseñar, clara, apasionada y cercana, fue la semilla que germinó en este libro. A él le debo mi afición por las matemáticas y mi deseo de transmitirlas a otros.

Y, por encima de todo, quiero agradecer profundamente a mi mujer, Marisa. Sin su apoyo constante, su paciencia inagotable y su fe en mí, este libro no habría visto la luz. Ha sido mi compañera en cada cálculo, en cada revisión, en cada desvelo, y le dedico esta obra con todo mi cariño y gratitud.

Que este libro inspire a otros a aprender, enseñar y compartir, como alguna vez lo hicieron conmigo.

Luis Minguillón Pascual

Indice tematico

Aritmética

- **PRIMERA PARTE: FUNDAMENTOS DE LA ARITMÉTICA**
    1. El sistema de numeración decimal
    2. Lectura y escritura de números naturales
    3. Valor posicional de las cifras
    4. Números romanos
    5. Clasificación de los números: naturales, enteros, racionales e irracionales
    6. Comparación y orden de números
    7. Aproximaciones y redondeo
    8. Potencias de base 10 y notación científica
    9. Múltiplos y divisores
    10. Números primos y compuestos
    11. Criba de Eratóstenes
    12. Máximo común divisor (MCD)
    13. Mínimo común múltiplo (MCM)
    14. Descomposición en factores primos
- **SEGUNDA PARTE: PROPORCIONES Y RAZONES**
    15. Suma y resta de números naturales
    16. Multiplicación de números naturales
    17. División de números naturales
    18. Propiedades de las operaciones
    19. Jerarquía de operaciones
    20. Operaciones combinadas
    21. Estimación de resultados
- **TERCERA PARTE: NÚMEROS ENTEROS**
    22. Introducción a los números enteros
    23. Suma y resta de enteros
    24. Multiplicación y división de enteros
    25. Uso de la recta numérica
    26. Valor absoluto
    27. Potencias y raíces de números enteros
    28. Problemas con números enteros
- **CUARTA PARTE: FRACCIONES Y DECIMALES**
    29. Concepto de fracción
    30. Fracciones equivalentes
    31. Simplificación de fracciones
    32. Comparación de fracciones
    33. Suma y resta de fracciones
    34. Multiplicación de fracciones
    35. División de fracciones
    36. Fracciones mixtas e impropias
    37. Introducción a los decimales

38. Conversión entre fracción y decimal
39. Suma, resta, multiplicación y división con decimales
40. Redondeo y truncamiento de decimales
41. Porcentaje y tanto por uno
42. Aumentos y descuentos porcentuales
43. Interés simple

- **QUINTA PARTE: PROPORCIONES Y RAZONES**
    - Capítulo 44: Razón y proporción
    - Capítulo 45: Repartos proporcionales
    - Capítulo 46: Regla de tres simple
    - Capítulo 47: Regla de tres compuesta
    - Capítulo 48: Porcentaje como proporción
    - Capítulo 49: Aplicaciones prácticas de proporciones
- **SEXTA PARTE: MAGNITUDES Y MEDIDAS**

50. Sistemas de unidades
51. Longitud, masa y capacidad
52. Tiempo: días, horas, minutos y segundos
53. Área y volumen
54. Conversión de unidades
55. Escalas y mapas
56. Problemas con unidades compuestas

- **SÉPTIMA PARTE: PROBLEMAS Y APLICACIONES**
    - Capítulo 57: Problemas verbales con operaciones básicas
    - Capítulo 58: Problemas con múltiplos y divisores
    - Capítulo 59: Problemas con fracciones y decimales
    - Capítulo 60: Problemas con porcentajes
    - Capítulo 61: Problemas de reparto y proporcionalidad
    - Capítulo 62: Problemas con unidades y conversiones
    - Capítulo 63: Problemas con datos de la vida diaria
    - Capítulo 64: Estrategias para resolver problemas
- **OCTAVA PARTE: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA ARITMÉTICA**
    - Capítulo 65: Uso de letras en lugar de números
    - Capítulo 66: Expresiones numéricas con incógnitas
    - Capítulo 67: Igualdades y desigualdades
    - Capítulo 68: Ecuaciones de primer grado con una incógnita
    - Capítulo 69: Aplicación de ecuaciones en problemas aritméticos

Polinomios

- **MÓDULO 1: INTRODUCCIÓN A LOS POLINOMIOS**

1. ¿Qué es un polinomio?
2. Términos algebraicos: coeficiente, variable, exponente
3. Término independiente
4. Clasificación de los polinomios
5. Grado de un polinomio

6. Valor numérico de un polinomio
7. Evaluación de polinomios
8. Notación algebraica y lenguaje simbólico

- **MÓDULO 2: OPERACIONES BÁSICAS CON POLINOMIOS**

9. Suma de polinomios
10. Resta de polinomios
11. Multiplicación de un monomio por un polinomio
12. Multiplicación de polinomios
13. Propiedades de las operaciones con polinomios
14. División de polinomios por monomios
15. División de polinomios entre polinomios
16. Criterios de divisibilidad y términos semejantes

- **MÓDULO 3: IDENTIDADES NOTABLES**

17. Cuadrado de un binomio
18. Producto de binomios conjugados
19. Cubo de un binomio
20. Suma y diferencia de cubos
21. Cuadrado de trinomios
22. Otras identidades algebraicas
23. Aplicación de identidades notables en simplificación

- **MÓDULO 4: FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS**

24. Concepto de factorización
25. Factor común
26. Factor común por agrupación
27. Trinomio cuadrado perfecto
28. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
29. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
30. Diferencia de cuadrados
31. Suma y diferencia de cubos
32. Polinomios con cuatro o más términos
33. Comprobación de la factorización
34. Resolución de ecuaciones por factorización

- **MÓDULO 5: DIVISIÓN DE POLINOMIOS**

35. División larga de polinomios
36. División sintética (Regla de Ruffini)
37. Criterio del residuo
38. Teorema del resto
39. Teorema del factor
40. Uso de la división en problemas algebraicos

- **MÓDULO 6: RAÍCES Y CERO DE LOS POLINOMIOS**

41. Qué es una raíz de un polinomio
42. Relación entre ceros y factores
43. Búsqueda de raíces racionales (Regla de Descartes)

44. Teorema de las raíces racionales
45. Teorema fundamental del álgebra
46. Multiplicidad de raíces
47. Polinomios con coeficientes reales y complejos

- **MÓDULO 7: POLINOMIOS Y FUNCIONES**

48. Representación gráfica de polinomios
49. Comportamiento extremo y crecimiento
50. Intersecciones con los ejes
51. Zonas de positividad y negatividad
52. Análisis del signo de un polinomio
53. Aplicaciones de funciones polinómicas

- **MÓDULO 8: POLINOMIOS ESPECIALES Y APLICACIONES**

54. Polinomios simétricos
55. Polinomios homogéneos
56. Polinomios irreducibles
57. Problemas de la vida real modelados con polinomios
58. Polinomios en física, economía e ingeniería
59. Interpolación con polinomios
60. Resolución de problemas por igualación de polinomios

- **MÓDULO 9: POLINOMIOS EN DIFERENTES CAMPOS**

61. Polinomios en el cuerpo de los números reales
62. Polinomios en el cuerpo de los números complejos
63. Polinomios con coeficientes enteros
64. Polinomios sobre cuerpos finitos
65. Introducción a los polinomios en álgebra abstracta

- **MÓDULO 10: POLINOMIOS Y DERIVADAS (ENLACE CON EL CÁLCULO)**

66. Derivación de polinomios
67. Interpretación geométrica de la derivada
68. Cálculo de máximos y mínimos de funciones polinómicas
69. Tasa de cambio
70. Aproximación de funciones con polinomios (Taylor y Maclaurin)

Matemáticas Financieras

- **Unidad 1: Fundamentos de Matemáticas Financieras**
  - 1.1 Concepto de valor del dinero en el tiempo
  - 1.2 Interés simple y compuesto
  - 1.3 Tasas de interés: nominal, efectiva y real
  - 1.4 Capitalización: anticipada y vencida
  - 1.5 Conversión de tasas de interés
  - 1.6 Ecuación de valor
- **Unidad 2: Interés Simple**
  - 2.1 Definición y fórmula del interés simple
  - 2.2 Cálculo del capital, tasa, tiempo e interés

    - 2.3 Descuento comercial y racional simple
    - 2.4 Aplicaciones del interés simple en préstamos y pagarés
- **Unidad 3: Interés Compuesto**
    - 3.1 Fórmula del monto compuesto
    - 3.2 Valor presente y valor futuro
    - 3.3 Capitalización periódica y continua
    - 3.4 Tasas equivalentes en interés compuesto
    - 3.5 Comparación entre interés simple y compuesto
- **Unidad 4: Rentas o Anualidades**
    - 4.1 Clasificación de rentas: ordinarias, anticipadas, perpetuas
    - 4.2 Valor futuro y valor presente de una renta
    - 4.3 Anualidades vencidas y anticipadas
    - 4.4 Renta perpetua y renta diferida
    - 4.5 Aplicaciones en amortizaciones y fondos de inversión
- **Unidad 5: Amortización de Préstamos**
    - 5.1 Concepto de amortización
    - 5.2 Sistemas de amortización: francés, alemán y americano
    - 5.3 Cuadro de amortización
    - 5.4 Cálculo de cuota fija y saldo insoluto
    - 5.5 Aplicaciones bancarias y financieras
- **Unidad 6: Evaluación Financiera de Proyectos**
    - 6.1 Flujo de caja
    - 6.2 Valor presente neto (VPN)
    - 6.3 Tasa interna de retorno (TIR)
    - 6.4 Periodo de recuperación de la inversión
    - 6.5 Índice de rentabilidad
- **Unidad 7: Inflación y Tasa Real**
    - 7.1 Inflación y poder adquisitivo
    - 7.2 Tasa de interés nominal vs tasa real
    - 7.3 Ajuste por inflación en cálculos financieros
- **Unidad 8: Instrumentos Financieros**
    - 8.1 Bonos y obligaciones
    - 8.2 Acciones: rendimiento y valor presente
    - 8.3 Valoración de instrumentos financieros
    - 8.4 Tasas de rendimiento de inversiones
- **Unidad 9: Tópicos Avanzados**
    - 9.1 Interés continuo
    - 9.2 Gradientes aritméticos y geométricos
    - 9.3 Modelos financieros para decisiones empresariales
    - 9.4 Derivación de fórmulas financieras

ANEXO

- A. Cuadro de números primos del 1 al 1000

- B. Tabla de unidades y conversiones
- C. Formulario de fórmulas básicas
- D. Glosario de términos aritméticos
- E. Soluciones de ejercicios seleccionados
- F. Bibliografía recomendada

Aritmetica

PRIMERA PARTE: FUNDAMENTOS DE LA ARITMÉTICA

1. El sistema de numeración decimal

El sistema de numeración decimal es el sistema numérico más utilizado en el mundo. También se le conoce como sistema de base 10, ya que emplea diez símbolos diferentes para representar todos los números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Estos símbolos se llaman cifras y, combinándolos de distintas formas y en distintas posiciones, es posible formar cualquier número.

La característica más importante del sistema decimal es que es un sistema posicional. Esto significa que el valor de una cifra depende de la posición que ocupa dentro del número. Por ejemplo, en el número 462, el 4 representa cuatro centenas (400), el 6 representa seis decenas (60) y el 2 representa dos unidades (2).

Otra propiedad fundamental del sistema decimal es que cada posición representa una potencia de 10. Al ir hacia la izquierda, las potencias de 10 aumentan: unidades, decenas, centenas, unidades de mil, decenas de mil, etc. Al ir hacia la derecha desde la coma decimal, las potencias de 10 disminuyen: décimas, centésimas, milésimas, etc.

Ejemplo:
En el número 30574:

- El 3 está en la posición de las decenas de mil, así que vale 3 x 10000 = 30000
- El 0 está en la posición de las unidades de mil, así que vale 0 x 1000 = 0
- El 5 está en la posición de las centenas, así que vale 5 x 100 = 500
- El 7 está en la posición de las decenas, así que vale 7 x 10 = 70
- El 4 está en la posición de las unidades, así que vale 4 x 1 = 4

Suma total: 30000 + 0 + 500 + 70 + 4 = 30574

El sistema decimal ha sido adoptado universalmente debido a su simplicidad y eficiencia. Tiene su origen en las antiguas civilizaciones, como los hindúes y los árabes, quienes desarrollaron este sistema y lo transmitieron a Europa. Uno de los aportes más importantes fue la inclusión del cero como cifra, lo que permitió representar ausencias de valor en ciertas posiciones.

El uso del sistema decimal se extiende más allá de las matemáticas básicas. Se utiliza en ciencias, economía, computación y la vida cotidiana. Conocer bien su estructura es esencial para dominar operaciones aritméticas como la suma, resta, multiplicación, división y para comprender temas más avanzados como fracciones, porcentajes o álgebra.

---

2. Lectura y escritura de números naturales

Los números naturales son aquellos que se utilizan para contar objetos, expresar cantidades y ordenar elementos. Comienzan en el 1 y continúan indefinidamente: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. En algunos contextos también se incluye el 0 como número natural.

Leer y escribir correctamente los números naturales es fundamental para poder comunicarse con claridad y precisión, tanto oral como por escrito. A continuación se explican las reglas y estructuras básicas para hacerlo correctamente.

Para leer un número natural, se agrupan las cifras en períodos de tres en tres, comenzando desde la derecha. Cada grupo o período tiene un nombre específico: unidades, miles, millones, mil millones, billones, etc.

Ejemplo:
El número 4872165 se agrupa así: 4 872 165
Y se lee: Cuatro millones ochocientos setenta y dos mil ciento sesenta y cinco

Los nombres de los períodos son:

- Primer período: unidades (del 1 al 999)
- Segundo período: miles (del 1 000 al 999 999)
- Tercer período: millones (del 1 000 000 al 999 999 999)
- Cuarto período: mil millones o millardos
- Quinto período: billones, y así sucesivamente

Cuando se escribe un número con letras, se hace respetando las normas ortográficas del idioma. Por ejemplo:

- 34: treinta y cuatro
- 102: ciento dos
- 1150: mil ciento cincuenta
- 2021: dos mil veintiuno
- 145 000: ciento cuarenta y cinco mil

En la escritura numérica con cifras, es importante agrupar los números largos usando espacios o puntos (según la convención del país) para facilitar la lectura. Por ejemplo:

- 1 000 000 (un millón) puede escribirse también como 1.000.000 en algunos países

Reglas básicas de lectura:

1. No se dice "uno mil", se dice "mil"
2. No se dice "ciento y uno", se dice "ciento uno"
3. Se dice "un millón" y no "uno millón"
4. El "y" se usa solo entre decenas y unidades, por ejemplo: "cincuenta y seis"

Errores comunes:

- Decir "quinientos mil millones" cuando se quiere decir "quinientos mil" o "quinientos millones"
- Leer mal los ceros intermedios, por ejemplo: 1056 no se lee "mil cincuenta y seis" sino "mil cincuenta y seis" (sin pausas incorrectas)

Los números naturales pueden escribirse también en forma extendida o desarrollada, indicando el valor posicional de cada cifra. Por ejemplo:
El número 4 305 se puede escribir como:
4000 + 300 + 0 + 5
Esto se llama forma desarrollada.

Leer y escribir bien los números es una habilidad que se practica constantemente, y resulta indispensable para trabajar con operaciones, resolver problemas y comprender el valor real de las cantidades que se manejan en la vida diaria y en el estudio de las matemáticas.

---

3. Valor posicional de las cifras

El valor posicional de las cifras es uno de los principios fundamentales del sistema de numeración decimal. Este sistema es posicional porque el valor de una cifra dentro de un número depende del lugar que ocupa.

Cada posición representa una potencia de 10. A medida que se avanza hacia la izquierda en un número, el valor de cada cifra aumenta multiplicándose por potencias de 10 mayores. A medida que se avanza hacia la derecha (en números con decimales), las potencias de 10 disminuyen.

Veamos un ejemplo con un número natural:

Número: 7 384
Descomposición posicional:

- El 7 está en la posición de las unidades de mil → $7 \times 1000 = 7000$
- El 3 está en la posición de las centenas → $3 \times 100 = 300$
- El 8 está en la posición de las decenas → $8 \times 10 = 80$
- El 4 está en la posición de las unidades → $4 \times 1 = 4$

Suma de los valores posicionales: $7000 + 300 + 80 + 4 = 7\,384$

En este ejemplo, la misma cifra, por ejemplo el número 4, podría representar valores diferentes en otras posiciones. Por ejemplo:

- En 4 000 → el 4 vale 4000
- En 400 → el 4 vale 400
- En 40 → el 4 vale 40
- En 4 → el 4 vale 4

Por tanto, **el valor real de una cifra depende de su posición**.

Para visualizar las posiciones, se puede usar una tabla de valor posicional. En ella, se colocan las cifras del número en sus respectivas columnas:

Ejemplo con el número 1 572 603

Un. millón	**C. mil**	**D. mil**	**U. mil**	**C.**	**D.**	**U.**
1	5	7	2	6	0	3

Cada columna tiene un nombre que corresponde a su posición:

- U: Unidades (×1)
- D: Decenas (×10)
- C: Centenas (×100)

- U. mil: Unidades de mil (×1 000)
- D. mil: Decenas de mil (×10 000)
- C. mil: Centenas de mil (×100 000)
- Un. millón: Unidades de millón (×1 000 000)

Esta tabla ayuda a descomponer, leer y escribir números con claridad, especialmente los de muchas cifras.

En el caso de los números decimales, las posiciones después de la coma representan potencias negativas de 10:

Ejemplo con el número 37.582

- El 3 está en la posición de las decenas → $3 \times 10 = 30$
- El 7 está en la posición de las unidades → $7 \times 1 = 7$
- El 5 está en la posición de las décimas → $5 \times 0.1 = 0.5$
- El 8 está en la posición de las centésimas → $8 \times 0.01 = 0.08$
- El 2 está en la posición de las milésimas → $2 \times 0.001 = 0.002$

Valor total: $30 + 7 + 0.5 + 0.08 + 0.002 = 37.582$

Comprender el valor posicional es fundamental para realizar operaciones matemáticas correctamente y para comprender conceptos más avanzados como el sistema binario, el redondeo, la notación científica y los sistemas de numeración en general.

---

4. Números romanos

Los números romanos constituyen un sistema de numeración no posicional que se originó en la antigua Roma. A diferencia del sistema decimal, en los números romanos el valor de cada símbolo no depende de su posición, sino de reglas específicas de combinación.

Este sistema utiliza letras mayúsculas del alfabeto latino para representar ciertos valores numéricos fijos:

- I = 1
- V = 5
- X = 10
- L = 50
- C = 100
- D = 500
- M = 1000

Los números se forman combinando estos símbolos, siguiendo ciertas reglas:

1. **Suma**: Si una letra se coloca a la derecha de otra de igual o mayor valor, sus valores se suman.
   Ejemplos:
   - VI = 5 + 1 = 6
   - XV = 10 + 5 = 15
   - MCC = 1000 + 100 + 100 = 1200
2. **Resta**: Si una letra se coloca a la izquierda de otra de mayor valor, se resta su valor.
   Ejemplos:
   - IV = 5 - 1 = 4
   - IX = 10 - 1 = 9
   - XL = 50 - 10 = 40
   - CM = 1000 - 100 = 900
3. **No se repiten más de tres veces el mismo símbolo seguido**. En lugar de escribir IIII para el 4, se usa IV.
   De igual forma, el número 40 no se escribe XXXX, sino XL.
4. **Símbolos como V, L y D no se repiten nunca**, ya que no representan potencias de 10.

A continuación, una tabla con los números romanos del 1 al 20:

1 - I
2 - II
3 - III
4 - IV

5 - V
6 - VI
7 - VII
8 - VIII
9 - IX
10 - X
11 - XI
12 - XII
13 - XIII
14 - XIV
15 - XV
16 - XVI
17 - XVII
18 - XVIII
19 - XIX
20 - XX

Otros ejemplos útiles:

- 50 = L
- 100 = C
- 500 = D
- 1000 = M
- 2024 = MMXXIV
- 1989 = MCMLXXXIX

Usos actuales de los números romanos:
Aunque el sistema romano no se utiliza para cálculos aritméticos, sigue presente en la actualidad en contextos como:

- Nombres de reyes y papas (Carlos V, Juan Pablo II)
- Enumeración de siglos (siglo XXI)
- Numeración de capítulos, tomos o volúmenes (Capítulo IV, Tomo III)
- Relojes con numeración clásica

El sistema de numeración romana permite comprender cómo otros pueblos representaban los números, y también sirve como base para desarrollar el pensamiento lógico al seguir reglas distintas al sistema decimal.

---

5. Clasificación de los números: naturales, enteros, racionales e irracionales

Los números que utilizamos en matemáticas y en la vida cotidiana pueden clasificarse en distintos conjuntos según sus características. Esta clasificación permite organizarlos de manera lógica y facilita su estudio y aplicación. A continuación se describen los principales conjuntos numéricos:

1. Números naturales (N):
Son los números que se utilizan para contar objetos. Se representan con la letra **N**.
Conjunto: {1, 2, 3, 4, 5, ...}
En algunos contextos se incluye el 0: {0, 1, 2, 3, ...}
Características:

- No tienen parte decimal.
- No son negativos.
- Se usan para contar y ordenar.

Ejemplos: 7, 12, 1000

2. Números enteros (Z):
Incluyen a los números naturales, el 0 y los negativos. Se representan con la letra **Z**.
Conjunto: {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}
Características:

- No tienen parte decimal.
- Incluyen los números negativos.
- Se usan para representar pérdidas, temperaturas bajo cero, deudas, etc.

Ejemplos: -8, 0, 15

3. Números racionales (Q):
Son todos los números que pueden expresarse como el cociente de dos enteros, es decir, fracciones. Se representan con la letra **Q**.
Conjunto: $\{a/b \mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$
Incluye:

- Fracciones: 2/3, -7/5, 10/1
- Números decimales finitos: 0.25 = 1/4
- Números decimales periódicos: 0.333... = 1/3
- Todos los números enteros (porque cualquier entero puede escribirse como fracción: 4 = 4/1)

Características:

- Su parte decimal puede ser exacta o periódica (se repite).
- Son útiles para representar cantidades divisibles.

Ejemplos: 3/4, -1.5, 2.666...

4. Números irracionales (I):
Son los números que no pueden expresarse como fracción. Su parte decimal es infinita y no

periódica.
Se representan con la letra **I**.
Características:

- No pueden escribirse como cociente de enteros.
- Sus decimales no se repiten ni terminan.
- Se descubrieron al intentar representar raíces cuadradas no exactas.

Ejemplos:

- $\sqrt{2} \approx 1.4142135...$
- $\pi \approx 3.1415926...$
- $e \approx 2.7182818...$

Resumen de la inclusión entre conjuntos:

- $N \subset Z \subset Q$
- $Q \cup I = R$ (números reales)

5. Números reales (R):
Es el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales. Se representan con la letra **R**.
Incluyen: naturales, enteros, fracciones, decimales exactos, periódicos e irracionales.
Es el conjunto más completo que se estudia en los niveles básicos y medios.

Ejemplos: -5, 0, 2.5, $\sqrt{3}$, π

Importancia de esta clasificación:
Conocer los tipos de números permite saber qué operaciones se pueden realizar, cómo representar magnitudes en distintos contextos y qué propiedades tiene cada número. Además, permite resolver ecuaciones, trabajar con funciones, y avanzar hacia matemáticas más abstractas como el álgebra o el cálculo.

---

6. Comparación y orden de números

Comparar y ordenar números es una habilidad fundamental en aritmética, ya que permite establecer relaciones de magnitud entre distintas cantidades. Esta operación se realiza tanto con números naturales como con enteros, fraccionarios, decimales y racionales.

1. Símbolos de comparación:

Para comparar números se utilizan los siguientes signos:

- > : mayor que
- < : menor que
- = : igual a
- ≥ : mayor o igual que
- ≤ : menor o igual que

Ejemplos:
7 > 3 significa "7 es mayor que 3"
4 < 10 significa "4 es menor que 10"
5 = 5 significa "5 es igual a 5"

2. Comparación de números naturales:

Al comparar números naturales, se observa el número de cifras:

- El que tiene más cifras es mayor.
- Si tienen el mismo número de cifras, se comparan de izquierda a derecha, cifra por cifra.

Ejemplo:
582 > 309 (porque 5 > 3 en la primera cifra)
7648 < 7812 (porque la tercera cifra 4 < 8)

3. Comparación de números enteros:

Con los enteros, hay que tener en cuenta el signo:

- Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.
- Entre negativos, el que tiene menor valor absoluto es el mayor.

Ejemplos:
5 > -3
-4 < -2 (porque -2 está más cerca del 0)
-10 < 0

4. Comparación de números decimales:

Paso a paso:

- Se comparan las partes enteras.
- Si son iguales, se comparan las cifras decimales de izquierda a derecha.

- Si un número tiene menos cifras decimales, se puede completar con ceros sin alterar su valor.

Ejemplos:
3.25 < 3.6 (porque 25 < 60 en décimas)
4.50 = 4.5
2.37 > 2.036 (porque 370 > 036)

5. Comparación de fracciones:

Métodos:

- **Igual denominador**: se comparan los numeradores.
  Ejemplo: 3/7 < 5/7
- **Distinto denominador**: se igualan los denominadores (mínimo común múltiplo) o se cruzan productos.
  Ejemplo: ¿Cuál es mayor: 2/5 o 3/7?
  Cruzamos:
  2×7 = 14
  3×5 = 15 → 15 > 14 → entonces 3/7 > 2/5

6. Orden ascendente y descendente:

- **Ascendente**: de menor a mayor.
  Ejemplo: 4, 7, 15, 23
- **Descendente**: de mayor a menor.
  Ejemplo: 90, 45, 30, 8

Ordenar números implica aplicar correctamente la comparación. Es útil para organizar datos, resolver problemas, representar intervalos, establecer rangos de precios, edades, distancias, etc.

7. Número opuesto y valor absoluto:

- El **número opuesto** de un número es el mismo número con signo contrario.
  Ejemplo: el opuesto de +5 es -5
- El **valor absoluto** representa la distancia al cero, sin importar el signo. Se escribe con barras verticales.
  Ejemplo:
  |7| = 7
  |-7| = 7

El valor absoluto siempre es positivo o cero.

Resumen:
Comparar y ordenar requiere conocer el tipo de número y aplicar reglas específicas para cada caso. Es una base para entender intervalos, operaciones, desigualdades y análisis de datos.

---

7. Aproximaciones y redondeo

En matemáticas y en la vida cotidiana, muchas veces no es necesario trabajar con cifras exactas, sino con valores aproximados. Las aproximaciones y el redondeo permiten representar números de manera más sencilla, conservando la información esencial sin necesidad de mostrar todos los decimales o cifras.

1. ¿Qué es una aproximación?

Una aproximación es una estimación cercana al valor real de un número. Se usa cuando:

- El número exacto es demasiado largo o complejo
- Se busca simplificar cálculos
- La precisión no es estrictamente necesaria

Ejemplo:
$\sqrt{2} \approx 1.41$ (su valor real es 1.4142135..., pero se aproxima a dos cifras decimales)

2. Redondeo de números

Redondear significa ajustar un número al múltiplo más cercano de cierta unidad, dependiendo del lugar que se desea conservar: unidades, decenas, centenas, décimas, centésimas, etc.

Regla general para redondear:

- Si la cifra siguiente a la que se desea conservar es menor que 5, la cifra se mantiene igual.
- Si es 5 o mayor, la cifra se incrementa en 1.

Ejemplos:

Redondeo a la **unidad**:

- $6.3 \rightarrow 6$ (porque $3 < 5$)
- $6.7 \rightarrow 7$ (porque $7 \geq 5$)

Redondeo a la **décima**:

- $3.24 \rightarrow 3.2$ (porque $4 < 5$)
- $3.27 \rightarrow 3.3$ (porque $7 \geq 5$)

Redondeo a la **centena**:

- $142 \rightarrow 100$
- $178 \rightarrow 200$

Redondeo a la **milésima**:

- $4.1368 \rightarrow 4.137$
- $4.1362 \rightarrow 4.136$

3. Tipos de aproximaciones

- **Por exceso:** se aproxima al valor inmediatamente mayor.
  Ejemplo: $4.2 \rightarrow 5$ (por exceso a la unidad)

- **Por defecto:** se aproxima al valor inmediatamente menor.
  Ejemplo: 4.9 → 4 (por defecto a la unidad)
- **A la unidad más próxima:** se usa la regla general de redondeo para decidir si subir o mantener.

4. Notación de la aproximación

Se utiliza el símbolo "≈" para indicar que un valor es aproximado.

Ejemplo:
π ≈ 3.14
√3 ≈ 1.732

5. Error absoluto y error relativo

- **Error absoluto**: diferencia entre el valor real y el valor aproximado.
  Error absoluto = |valor real − valor aproximado|
- **Error relativo**: cociente entre el error absoluto y el valor real.
  Error relativo = (error absoluto / valor real) × 100 (se expresa en porcentaje)

Ejemplo:
Valor real: 8.376
Valor aproximado: 8.4
Error absoluto: |8.376 − 8.4| = 0.024
Error relativo: (0.024 / 8.376) × 100 ≈ 0.29%

6. Aplicaciones del redondeo

- Estimaciones en compras y precios
- Mediciones físicas y científicas
- Resultados estadísticos
- Informes y presentación de datos

Resumen:
El redondeo y las aproximaciones permiten simplificar cifras y facilitar cálculos. Son herramientas fundamentales en el uso práctico de los números y en el manejo de datos, siempre teniendo en cuenta el nivel de precisión necesario para cada caso.

---

8. Potencias de base 10 y notación científica

Las potencias de base 10 y la notación científica son herramientas matemáticas fundamentales para representar números muy grandes o muy pequeños de forma más compacta, clara y eficiente.

1. Potencias de base 10

Una potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación repetida. Se representa como:

10^n, donde:

- **10** es la base
- **n** es el exponente
- Significa que se multiplica el 10 por sí mismo **n** veces

Ejemplos de potencias de base 10 (positivas):

- $10^1 = 10$
- $10^2 = 10 \times 10 = 100$
- $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$
- $10^5 = 100\,000$

Potencias negativas de base 10:
Representan divisiones o números decimales.

- $10^{-1} = 1 / 10 = 0.1$
- $10^{-2} = 1 / 100 = 0.01$
- $10^{-3} = 1 / 1\,000 = 0.001$

En general:

- Si **n > 0**, el número tiene **n ceros a la derecha** del 1
- Si **n < 0**, el número tiene **n ceros después del punto decimal** antes del 1

2. Notación científica

La notación científica se usa para escribir números muy grandes o muy pequeños de forma breve y ordenada. Se basa en potencias de 10.

Forma general:
$a \times 10^n$, donde:

- **a** es un número decimal mayor o igual que 1 y menor que 10
- **n** es un número entero (positivo o negativo)

Ejemplos con números grandes:

- $5\,000 = 5 \times 10^3$
- $320\,000 = 3.2 \times 10^5$
- $1\,000\,000 = 1 \times 10^6$

Ejemplos con números pequeños:

- $0.01 = 1 \times 10^{-2}$
- $0.004 = 4 \times 10^{-3}$
- $0.0000065 = 6.5 \times 10^{-6}$

3. Cómo convertir un número a notación científica:

Paso 1: Mover la coma decimal hasta dejar un número entre 1 y 10
Paso 2: Contar cuántos lugares se movió la coma
Paso 3: Escribir como $a \times 10^n$, siendo n el número de lugares

- Si el número original era mayor que 1, n es positivo
- Si era menor que 1, n es negativo

Ejemplo 1:
Número: 478 000
→ Se mueve la coma 5 lugares a la izquierda: 4.78×10^5

Ejemplo 2:
Número: 0.00053
→ Se mueve la coma 4 lugares a la derecha: 5.3×10^{-4}

4. Operaciones con potencias de base 10

- **Multiplicación:**
  $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$
  Ejemplo: $10^2 \times 10^3 = 10^5 = 100\,000$
- **División:**
  $10^n \div 10^m = 10^{n-m}$
  Ejemplo: $10^5 \div 10^2 = 10^3 = 1\,000$
- **Potencia de una potencia:**
  $(10^n)^m = 10^{n \cdot m}$
  Ejemplo: $(10^2)^3 = 10^6$

5. Usos comunes de la notación científica

- Física (distancias astronómicas, masa de átomos)
- Química (concentraciones muy bajas)
- Informática (cálculos de alta precisión)
- Economía (cantidades de dinero muy grandes)
- Ciencias en general (datos extremos)

Resumen:
La notación científica y las potencias de base 10 permiten representar, operar y comunicar con claridad valores extremadamente grandes o pequeños. Son herramientas básicas en la matemática avanzada, la ciencia y la tecnología.

---

9. Múltiplos y divisores

En aritmética, los conceptos de múltiplos y divisores son fundamentales para entender la relación entre números y para resolver problemas de divisibilidad, factorización y simplificación de fracciones.

1. Múltiplo de un número

Un número es múltiplo de otro si se puede expresar como el producto de ese número por un número entero.

Definición:
Un número **m** es múltiplo de otro número **n** si existe un entero **k** tal que:
$m = n \times k$

Ejemplo:

- 15 es múltiplo de 3, porque $15 = 3 \times 5$
- 40 es múltiplo de 8, porque $40 = 8 \times 5$
- Todos los números terminados en 0 o 5 son múltiplos de 5.

2. Divisor de un número

Un número es divisor de otro si al dividir el segundo por el primero, el resultado es un número entero sin residuo.

Definición:
Un número **d** es divisor de otro número **n** si $n \div d$ es un número entero.

Ejemplo:

- 4 es divisor de 20, porque $20 \div 4 = 5$
- 7 es divisor de 21, porque $21 \div 7 = 3$
- 1 es divisor de todos los números.

3. Propiedades importantes

- Todo número es múltiplo de 1 y de sí mismo.
- El número 0 es múltiplo de todos los números ($0 = n \times 0$).
- El número 1 es divisor de todos los números.

4. Lista de múltiplos y divisores

Para un número dado, podemos listar sus múltiplos y divisores.

Ejemplo: Para el número 12

- Divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Múltiplos: 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

5. Aplicaciones

- Simplificar fracciones encontrando divisores comunes
- Resolver problemas de divisibilidad
- Encontrar múltiplos comunes para sumar o comparar fracciones
- Problemas con sincronización de eventos o ciclos (como múltiplos comunes)

6. Ejercicio sencillo

Determina si 36 es múltiplo de 9 y si 7 es divisor de 35.

Solución:
$36 \div 9 = 4 \rightarrow$ 36 es múltiplo de 9
$35 \div 7 = 5 \rightarrow$ 7 es divisor de 35

Resumen:
Los múltiplos y divisores permiten analizar cómo se relacionan los números enteros entre sí, siendo conceptos claves para la factorización, el cálculo de divisores comunes y la resolución de problemas de divisibilidad.

---

10. Números primos y compuestos

En aritmética, los números primos y compuestos son fundamentales para entender la estructura de los números enteros y su factorización.

1. Número primo

Un número primo es un número natural mayor que 1 que tiene exactamente dos divisores: 1 y él mismo.

Ejemplos:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Características:

- El número 2 es el único número primo par.
- Los números primos son la base para construir todos los números naturales mediante la multiplicación.

2. Número compuesto

Un número compuesto es un número natural mayor que 1 que tiene más de dos divisores, es decir, tiene divisores distintos de 1 y él mismo.

Ejemplos:
4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, ...

Características:

- Siempre puede factorizarse en números primos.
- No es primo ni 1.

3. Número 1 y 0

- El número 1 no es ni primo ni compuesto, se considera un caso especial.
- El número 0 no se clasifica como primo ni compuesto.

4. Importancia de los números primos

- Son los "ladrillos" para construir todos los números naturales (teorema fundamental de la aritmética).
- Se usan en criptografía, seguridad informática y teorías matemáticas avanzadas.

5. Ejercicio sencillo

Determina si los siguientes números son primos o compuestos: 17, 18, 19, 20.

Solución:

- 17 es primo (divisores: 1 y 17)
- 18 es compuesto (divisores: 1, 2, 3, 6, 9, 18)
- 19 es primo (divisores: 1 y 19)
- 20 es compuesto (divisores: 1, 2, 4, 5, 10, 20)

Resumen:
Los números primos y compuestos forman la base del estudio de los números enteros. Conocerlos permite factorizar, simplificar y analizar propiedades de los números de manera más profunda.

---

11. Criba de Eratóstenes

La Criba de Eratóstenes es un método sencillo y eficaz para encontrar todos los números primos menores o iguales a un número natural dado.

1. ¿Qué es la Criba de Eratóstenes?

Es un procedimiento para eliminar sistemáticamente los múltiplos de cada número primo comenzando desde 2, dejando solo los números que son primos.

2. Pasos para aplicar la Criba de Eratóstenes:

1. Escribe una lista de números desde 2 hasta el número máximo que deseas analizar.
2. Empieza con el primer número (2). Marca como primos los números que no han sido eliminados.
3. Elimina (tachando o borrando) todos los múltiplos de ese número, excepto el mismo.
4. Pasa al siguiente número no eliminado en la lista.
5. Repite los pasos 3 y 4 hasta que hayas procesado todos los números hasta la raíz cuadrada del número máximo.

3. Ejemplo práctico:

Encontrar los números primos hasta 30:

- Lista inicial: 2, 3, 4, 5, 6, ..., 30
- Empezamos con 2. Eliminamos múltiplos de 2 (4, 6, 8, 10, ... 30).
- Siguiente número no eliminado es 3. Eliminamos múltiplos de 3 (6, 9, 12, 15, ... 30).
- Siguiente número no eliminado es 5. Eliminamos múltiplos de 5 (10, 15, 20, 25, 30).
- Siguiente número no eliminado es 7. Eliminamos múltiplos de 7 (14, 21, 28).
- Continuamos hasta $\sqrt{30} \approx 5.4$, por lo que terminamos aquí.

Los números que quedan sin eliminar son:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 → estos son los números primos hasta 30.

4. Importancia de la Criba de Eratóstenes

- Método eficiente para obtener números primos pequeños.
- Base para algoritmos de factorización y criptografía.
- Facilita el estudio de propiedades y patrones en números primos.

Resumen:
La Criba de Eratóstenes es un procedimiento sistemático para encontrar números primos, eliminando múltiplos y dejando solo aquellos números que cumplen la definición de número primo.

---

12. Máximo común divisor (MCD)

El Máximo Común Divisor, abreviado como MCD, es el número más grande que divide exactamente a dos o más números sin dejar residuo.

1. Definición:
El MCD de dos números es el mayor número que es divisor común de ambos.

Ejemplo:
Para los números 12 y 18, el MCD es 6 porque:

- Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18
  Los divisores comunes son 1, 2, 3 y 6; el mayor es 6.

2. Métodos para calcular el MCD

a) Descomposición en factores primos:

- Se factoriza cada número en sus factores primos.
- Se toman los factores comunes con el menor exponente.
- Se multiplican esos factores para obtener el MCD.

Ejemplo con 12 y 18:
$12 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
Factores comunes con menor exponente: 2^1 y 3^1
$MCD = 2 \times 3 = 6$

b) Algoritmo de Euclides:
Un método eficiente que consiste en dividir el número mayor por el menor y repetir el proceso con el divisor y el residuo hasta que el residuo sea 0. El último divisor es el MCD.

Ejemplo con 48 y 18:
$48 \div 18 = 2$, residuo 12
$18 \div 12 = 1$, residuo 6
$12 \div 6 = 2$, residuo 0
El MCD es 6.

3. Propiedades del MCD

- MCD(a, b) = MCD(b, a) (conmutativo)
- MCD(a, 0) = a
- Si el MCD de a y b es 1, se dice que a y b son primos entre sí o coprimos.

4. Aplicaciones

- Simplificación de fracciones
- Resolución de problemas de divisibilidad
- Cálculo de mínimo común múltiplo (MCM)

- En problemas que involucran divisiones exactas

5. Ejercicio sencillo

Calcula el MCD de 24 y 36.

Solución:

- Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
- Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
- Divisores comunes: 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Máximo común divisor: 12

---

13. Mínimo común múltiplo (MCM)

El Mínimo Común Múltiplo, abreviado como MCM, es el número más pequeño, distinto de cero, que es múltiplo común de dos o más números.

1. Definición:
El MCM de dos o más números es el menor número que es múltiplo de todos ellos.

Ejemplo:
Para los números 4 y 6, el MCM es 12 porque:

- Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, ...
- Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, ...
  El primer múltiplo común es 12.

2. Métodos para calcular el MCM

a) Listado de múltiplos:
Se listan los múltiplos de cada número hasta encontrar el primero que coincida.

Ejemplo con 3 y 5:

- Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...
- Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, ...
  El MCM es 15.

b) Usando el MCD:
Existe una relación importante entre el MCM y el MCD de dos números:

$MCM(a, b) = (a \times b) \div MCD(a, b)$

Ejemplo con 8 y 12:

- Primero calculamos el $MCD(8, 12) = 4$
- Luego calculamos $MCM = (8 \times 12) \div 4 = 96 \div 4 = 24$

3. Propiedades del MCM

- $MCM(a, b) \times MCD(a, b) = a \times b$
- El MCM de dos números es siempre mayor o igual que cualquiera de los números.

4. Aplicaciones

- Encontrar el común denominador en suma o resta de fracciones
- Resolver problemas de sincronización y periodicidad
- En problemas de cálculo con números enteros

5. Ejercicio sencillo

Calcula el MCM de 9 y 12.

Solución:

- $MCD(9, 12) = 3$

- MCM = (9 × 12) ÷ 3 = 108 ÷ 3 = 36

---

14. Descomposición en factores primos

La descomposición en factores primos es el proceso de expresar un número como el producto de números primos.

1. ¿Qué es la descomposición en factores primos?
Cualquier número natural mayor que 1 puede expresarse como el producto de números primos, que son sus factores primos.

Ejemplo:
$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

2. ¿Por qué es importante?

- Permite entender la estructura del número.
- Es útil para calcular el máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (MCM).
- Es fundamental en la teoría de números.

3. Método para descomponer un número

- Se empieza dividiendo el número por el menor número primo posible (generalmente 2).
- Se continúa dividiendo el cociente por números primos, hasta que el cociente sea 1.

Ejemplo con 60:
$60 \div 2 = 30$
$30 \div 2 = 15$
$15 \div 3 = 5$
$5 \div 5 = 1$

Entonces:
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

4. Ejercicio sencillo

Descompón el número 48 en factores primos.

Solución:
$48 \div 2 = 24$
$24 \div 2 = 12$
$12 \div 2 = 6$
$6 \div 2 = 3$
$3 \div 3 = 1$

Entonces:
$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$

Perfecto, quieres **100 ejercicios de dificultad progresiva** basados en las **14 lecciones del libro "Fundamentos de la Aritmética"** que mencionaste. Para organizarlo bien, voy a suponer que cada lección tiene su temática concreta (por ejemplo, números naturales, sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, fracciones, porcentajes, etc.) y crearé ejercicios variados y progresivos.

Plan de trabajo para generar los ejercicios:

- 14 lecciones → 100 ejercicios repartidos (aprox 7 ejercicios por lección).
- Progresión de dificultad: fácil → medio → difícil.
- Cada ejercicio con enunciado y solución breve.
- Texto plano y ordenado.

Ejercicios con soluciones - Primera Parte: Operaciones Básicas

---

Bloque 1: Lecciones 1 y 2 — Números Naturales, Sumas, Restas, Multiplicaciones y Divisiones

1. 45 + 27 = ?
   Solución: 72
2. 83 - 29 = ?
   Solución: 54
3. 12 × 8 = ?
   Solución: 96
4. 144 ÷ 12 = ?
   Solución: 12
5. 157 + 245 = ?
   Solución: 402
6. 980 - 376 = ?
   Solución: 604
7. 23 × 15 = ?
   Solución: 345
8. 560 ÷ 40 = ?
   Solución: 14
9. 654 + 789 = ?
   Solución: 1443
10. 1200 - 875 = ?
    Solución: 325
11. 18 × 25 = ?
    Solución: 450
12. 225 ÷ 9 = ?
    Solución: 25
13. 438 + 962 = ?
    Solución: 1400
14. 1000 - 723 = ?
    Solución: 277
15. 36 × 14 = ?
    Solución: 504
16. 450 ÷ 15 = ?
    Solución: 30

17.125 + 375 = ?
Solución: 500

18.870 - 299 = ?
Solución: 571

19.27 × 19 = ?
Solución: 513

20.360 ÷ 18 = ?
Solución: 20

Bloque 2: Lecciones 3, 4, 5 y 6 - Potencias, Raíces, Fracciones y Operaciones con Fracciones

1. Calcula 5^3 = ?
   Solución: 125
2. Calcula la raíz cuadrada de 81 = ?
   Solución: 9
3. Suma 3/4 + 2/4 = ?
   Solución: 5/4 o 1.25
4. Resta 7/8 - 3/8 = ?
   Solución: 4/8 = 1/2
5. Multiplica 2/3 × 4/5 = ?
   Solución: 8/15
6. Divide 5/6 ÷ 2/3 = ?
   Solución: 5/6 × 3/2 = 15/12 = 5/4
7. Convierte a decimal 7/10 = ?
   Solución: 0.7
8. Suma decimal 12.45 + 7.38 = ?
   Solución: 19.83
9. Resta decimal 25.9 - 13.57 = ?
   Solución: 12.33
10. Multiplica 4.2 × 3.5 = ?
    Solución: 14.7
11. Divide 16.8 ÷ 4 = ?
    Solución: 4.2
12. Calcula 2^5 = ?
    Solución: 32
13. Raíz cuadrada de 144 = ?
    Solución: 12

14. Suma 5/6 + 1/3 = ?
    Solución: 7/6

15. Resta 9/10 - 4/5 = ?
    Solución: 1/10

16. Multiplica 3/7 × 14/9 = ?
    Solución: 42/63 = 2/3

17. Divide 10/15 ÷ 2/5 = ?
    Solución: 10/15 × 5/2 = 50/30 = 5/3

18. Convierte a decimal 11/20 = ?
    Solución: 0.55

19. Suma decimal 7.25 + 13.75 = ?
    Solución: 21.0

20. Resta decimal 19.6 - 5.45 = ?
    Solución: 14.15

Bloque 3: Lecciones 7, 8 y 9 - Decimales, Porcentajes, Proporciones y Razones

1. Convierte 0.75 a fracción
   Solución: 3/4

2. Suma decimal 0.56 + 0.44 = ?
   Solución: 1.0

3. Resta decimal 3.2 - 1.85 = ?
   Solución: 1.35

4. Multiplica decimal 6.5 × 4 = ?
   Solución: 26.0

5. Divide decimal 9.6 ÷ 3 = ?
   Solución: 3.2

6. Calcula el 20% de 150
   Solución: 30

7. Un artículo cuesta 120 euros y tiene un descuento del 15%. ¿Cuál es el precio final?
   Solución: 102 euros

8. Si 30% de una cantidad es 45, ¿cuál es la cantidad total?
   Solución: 150

9. Simplifica la razón 24:36
   Solución: 2:3

10. Si la razón entre dos números es 5:8 y uno es 25, ¿cuál es el otro?
    Solución: 40

11. Proporción: 3/4 = x/16, calcula x
    Solución: 12
12. Si 5 kg de manzanas cuestan 20 euros, ¿cuánto cuestan 8 kg?
    Solución: 32 euros
13. Porcentaje: ¿Qué porcentaje es 45 de 180?
    Solución: 25%
14. Incrementa 250 en un 10%
    Solución: 275
15. Disminuye 80 en un 15%
    Solución: 68
16. Convierte 7.2% a decimal
    Solución: 0.072
17. Convierte 0.035 a porcentaje
    Solución: 3.5%
18. Si 3 lápices cuestan 1.50 euros, ¿cuánto cuesta 10 lápices?
    Solución: 5 euros
19. La proporción entre dos números es 4:7. Si la suma es 44, ¿cuáles son los números?
    Solución: 16 y 28
20. Si 60 es el 75% de un número, ¿cuál es ese número?
    Solución: 80

Bloque 4: Lecciones 10 y 11 — Regla de tres simple, unidades y medidas

1. Si 5 kg de arroz cuestan 20 euros, ¿cuánto cuestan 8 kg?
   Solución: 32 euros
2. Si 12 litros de pintura cubren 48 m², ¿cuántos litros se necesitan para 80 m²?
   Solución: 20 litros
3. Una máquina produce 150 piezas en 3 horas. ¿Cuántas produce en 7 horas?
   Solución: 350 piezas
4. Si una persona recorre 120 km en 2 horas, ¿cuál es su velocidad en km/h?
   Solución: 60 km/h
5. Si 3 kg de manzanas cuestan 9 euros, ¿cuánto cuestan 7 kg?
   Solución: 21 euros
6. Un coche consume 8 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuánta gasolina necesita para recorrer 250 km?
   Solución: 20 litros
7. Si 4 metros de tela cuestan 36 euros, ¿cuánto cuesta 1 metro?
   Solución: 9 euros

8. Un depósito se llena con 15 litros de agua en 3 minutos. ¿Cuánto tarda en llenarse con 45 litros?
   Solución: 9 minutos
9. Si 7 kg de azúcar cuestan 14 euros, ¿cuánto cuestan 10 kg?
   Solución: 20 euros
10. Una receta pide 250 gramos de harina para 4 personas. ¿Cuánta harina se necesita para 10 personas?
    Solución: 625 gramos
11. Si 10 metros de cable pesan 3 kg, ¿cuánto pesan 25 metros?
    Solución: 7.5 kg
12. Si un tren viaja a 80 km/h, ¿cuánto tarda en recorrer 240 km?
    Solución: 3 horas
13. Si una botella tiene 2 litros y se consumen 0.5 litros por día, ¿cuántos días dura la botella?
    Solución: 4 días
14. Una persona gana 1500 euros en 30 días. ¿Cuánto gana en 45 días?
    Solución: 2250 euros
15. Si 6 m^2 de pintura cubren una pared, ¿cuántos metros cuadrados cubrirán 15 m^2?
    Solución: 15 m^2 (ya que es área, igual)
16. Un coche recorre 360 km con 30 litros de gasolina. ¿Cuántos km recorre con 18 litros?
    Solución: 216 km
17. Si 8 kilogramos de naranjas cuestan 12 euros, ¿cuánto cuestan 3 kilogramos?
    Solución: 4.5 euros
18. Un avión vuela a 900 km/h. ¿Cuánto tarda en recorrer 2700 km?
    Solución: 3 horas
19. Si un litro de leche cuesta 1.2 euros, ¿cuánto cuestan 5 litros?
    Solución: 6 euros
20. Si 50 metros de tela cuestan 200 euros, ¿cuánto cuesta 1 metro?
    Solución: 4 euros

Bloque 5: Lecciones 12, 13 y 14 — Medidas de tiempo, área y volumen

1. ¿Cuántos segundos hay en 5 minutos?
   Solución: 300 segundos
2. Convierte 3 horas a minutos
   Solución: 180 minutos
3. ¿Cuántos días hay en 3 semanas?
   Solución: 21 días

4. Un rectángulo mide 7 m de largo y 4 m de ancho. ¿Cuál es su área?
   Solución: 28 m^2
5. Calcula el perímetro de un cuadrado de lado 6 m
   Solución: 24 m
6. ¿Cuál es el volumen de un cubo de arista 3 m?
   Solución: 27 m^3
7. ¿Cuántos litros caben en un cubo de 1 m^3?
   Solución: 1000 litros
8. Un tanque tiene capacidad de 500 litros. ¿Cuántos m^3 tiene?
   Solución: 0.5 m^3
9. Convierte 2500 ml a litros
   Solución: 2.5 litros
10. Un cilindro tiene radio 3 m y altura 5 m. ¿Cuál es su volumen? (Volumen = $\pi \times r^2 \times h$)
    Solución: 141.37 m^3 (aprox.)
11. ¿Cuántos centímetros hay en 2 metros?
    Solución: 200 cm
12. Convierte 120 minutos a horas
    Solución: 2 horas
13. Si un triángulo tiene base 8 m y altura 5 m, ¿cuál es su área? (Área = (base × altura) / 2)
    Solución: 20 m^2
14. Un tanque rectangular mide 4 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto. ¿Cuál es su volumen?
    Solución: 24 m^3
15. Convierte 3 km a metros
    Solución: 3000 m
16. ¿Cuántos días hay en 6 meses (considerando 30 días por mes)?
    Solución: 180 días
17. Un círculo tiene radio 7 m. ¿Cuál es su área? (Área = $\pi \times r^2$)
    Solución: 153.94 m^2 (aprox.)
18. Convierte 5000 gramos a kilogramos
    Solución: 5 kg
19. ¿Cuántos mililitros hay en 3.5 litros?
    Solución: 3500 ml
20. Un tanque cilíndrico tiene radio 2 m y altura 10 m. Calcula su volumen
    Solución: 125.66 m^3 (aprox.)

Bloque 6: Revisión general de operaciones básicas y aplicación

1. Suma 125 + 378 = ?
   Solución: 503

2. Resta 654 - 289 = ?
   Solución: 365
3. Multiplica 48 × 17 = ?
   Solución: 816
4. Divide 144 ÷ 12 = ?
   Solución: 12
5. Calcula 7^4 = ?
   Solución: 2401
6. Suma las fracciones 5/8 + 3/4 = ?
   Solución: 11/8 o 1.375
7. Resta 9/10 - 2/5 = ?
   Solución: 1/2 o 0.5
8. Multiplica 7/9 × 3/5 = ?
   Solución: 7/15
9. Divide 15/16 ÷ 5/8 = ?
   Solución: 3/2 o 1.5
10. Convierte 0.625 a fracción
    Solución: 5/8
11. Calcula el 30% de 200
    Solución: 60
12. Si un precio es 80 y sube un 25%, ¿cuál es el nuevo precio?
    Solución: 100
13. Si 18 es el 60% de un número, ¿cuál es el número?
    Solución: 30
14. La proporción 5:9 es igual a x:36, calcula x
    Solución: 20
15. Si 6 metros de tela cuestan 48 euros, ¿cuánto cuesta 10 metros?
    Solución: 80 euros
16. Convierte 180 minutos a horas
    Solución: 3 horas
17. Calcula el área de un rectángulo de 10 m por 5 m
    Solución: 50 m^2
18. Volumen de un cubo de 4 m de arista
    Solución: 64 m^3
19. Convierte 2500 ml a litros
    Solución: 2.5 litros
20. Un tanque cilíndrico de radio 3 m y altura 7 m. Volumen aproximado
    Solución: 197.92 m^3

SEGUNDA PARTE: PROPORCIONES Y RAZONES

---

15. Suma y resta de números naturales

La suma y la resta son operaciones básicas en aritmética que nos permiten combinar o separar cantidades representadas por números naturales.

Suma:
La suma es la operación de juntar dos o más números para obtener un total o suma. Se denota con el signo “+”. Por ejemplo, si tenemos 3 manzanas y luego 4 manzanas más, en total tenemos 3 + 4 = 7 manzanas.

Propiedades de la suma:

- **Conmutativa**: El orden de los sumandos no altera la suma. Es decir, a + b = b + a.
- **Asociativa**: Cuando sumamos más de dos números, podemos agruparlos de cualquier forma sin cambiar el resultado. (a + b) + c = a + (b + c).
- **Elemento neutro**: El número 0 es el elemento neutro para la suma porque a + 0 = a.

Resta:
La resta es la operación que permite quitar una cantidad de otra. Se denota con el signo “-”. Por ejemplo, si tienes 7 manzanas y comes 4, te quedan 7 - 4 = 3 manzanas.

La resta no es conmutativa ni asociativa, es decir, el orden sí importa y no se puede agrupar libremente.

Ejemplos prácticos:

- 15 + 28 = 43
- 100 - 45 = 55
- 7 + 0 = 7
- 12 - 0 = 12
- 0 - 5 no es un número natural, pues resulta negativo.

Es importante practicar la suma y la resta con ejercicios para afianzar el concepto y la técnica.

---

16. Multiplicación de números naturales

La multiplicación es una operación que representa la suma repetida de un mismo número. Es una forma abreviada y eficiente de sumar cantidades iguales varias veces.

Si tenemos 4 grupos con 3 objetos cada uno, la multiplicación 4×3 nos da el total: $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

La multiplicación se representa con el signo “×” o un punto “·”.

Propiedades de la multiplicación:

- **Conmutativa**: $a \times b = b \times a$
- **Asociativa**: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- **Elemento neutro**: El número 1 es el elemento neutro porque $a \times 1 = a$
- **Elemento absorbente**: El número 0 es absorbente porque $a \times 0 = 0$

Multiplicar por 10, 100, 1000 implica añadir ceros al final del número, lo cual facilita el cálculo.

Ejemplo:

- $7 \times 5 = 35$
- $12 \times 3 = 36$
- $9 \times 0 = 0$
- $1 \times 25 = 25$

También es importante dominar la tabla de multiplicar para realizar cálculos rápidos.

---

17. División de números naturales

La división es la operación inversa a la multiplicación y consiste en repartir una cantidad en partes iguales o averiguar cuántas veces un número está contenido en otro.

Se representa con el signo "÷" o una barra "/". Por ejemplo, 20 ÷ 4 pregunta cuántas veces cabe el 4 en el 20. La respuesta es 5 porque 4 × 5 = 20.

En la división, el número que se divide se llama **dividendo**, el número por el que se divide es el **divisor** y el resultado es el **cociente**.

Cuando el dividendo no es múltiplo exacto del divisor, existe un **resto** o residuo. Por ejemplo, 22 ÷ 4 = 5, resto 2.

Propiedades importantes:

- La división no es conmutativa ni asociativa.
- Dividir entre 1 devuelve el mismo número.
- No se puede dividir entre 0.

Ejemplos:

- 30 ÷ 5 = 6
- 50 ÷ 10 = 5
- 17 ÷ 3 = 5 resto 2
- 0 ÷ 7 = 0

El aprendizaje de la división incluye la técnica de la división larga o dividendo y divisor, para números grandes.

---

18. Propiedades de las operaciones

Las operaciones aritméticas básicas — suma, resta, multiplicación y división — tienen propiedades que ayudan a resolver problemas con mayor facilidad y seguridad.

Suma y multiplicación poseen:

- Propiedad conmutativa
- Propiedad asociativa
- Elemento neutro

Resta y división no cumplen con estas propiedades, porque el orden y la agrupación afectan el resultado.

Además, la multiplicación es distributiva respecto a la suma y resta:
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

Esta propiedad es fundamental para simplificar y calcular expresiones matemáticas.

En resumen:

- Suma y multiplicación son más “flexibles” en el manejo del orden y agrupamiento.
- Resta y división requieren más atención en el orden y procedimiento.

---

19. Jerarquía de operaciones

Cuando en una expresión matemática aparecen varias operaciones, es importante seguir un orden para obtener el resultado correcto. Este orden es la **jerarquía de operaciones**.

Reglas principales:

1. Se realizan primero las operaciones dentro de paréntesis o agrupaciones.
2. Luego, las potencias y raíces. (Aunque no son tema de números naturales, es bueno mencionarlo.)
3. Después, multiplicación y división, de izquierda a derecha.
4. Finalmente, suma y resta, de izquierda a derecha.

Ejemplo:
Calcular $3 + 4 \times 2 = ?$

- Primero multiplicar $4 \times 2 = 8$
- Luego sumar $3 + 8 = 11$

Si no se sigue la jerarquía, los resultados serán erróneos.

Es importante aprender a leer bien las expresiones y respetar esta jerarquía para evitar errores.

---

20. Operaciones combinadas

Las operaciones combinadas son expresiones que contienen dos o más tipos de operaciones aritméticas y posiblemente agrupaciones con paréntesis.

Para resolver operaciones combinadas, se sigue la jerarquía de operaciones: resolver primero paréntesis, luego multiplicación/división y al final suma/resta.

Ejemplo:
Calcular $(5 + 3) \times (12 - 7) \div 2$

- Resolver paréntesis: $(5 + 3) = 8$, $(12 - 7) = 5$
- Multiplicar: $8 \times 5 = 40$
- Dividir: $40 \div 2 = 20$

Es importante practicar con ejercicios variados para manejar la jerarquía con confianza.

---

21. Estimación de resultados

La estimación es una técnica que consiste en aproximar un resultado para tener una idea rápida y práctica del valor sin realizar cálculos exactos.

Es útil para revisar si un cálculo es razonable o para tomar decisiones cuando no es necesario un valor exacto.

Formas de estimar:

- Redondear números a cifras significativas (decenas, centenas) y luego operar.
- Usar números cercanos “fáciles” para hacer cálculos mentales.

Ejemplo:
Para estimar 198 + 253, podemos redondear a 200 + 250 = 450, lo que es una buena aproximación del resultado real 451.

La estimación es muy útil en la vida diaria y en problemas prácticos donde la rapidez es importante.

Ejercicios con soluciones - Segunda Parte: Operaciones Básicas

Capítulo 15: Suma y resta de números naturales (1 a 20)

1. 7 + 5 = **12**
2. 15 + 9 = **24**
3. 28 - 13 = **15**
4. 100 - 58 = **42**
5. 43 + 27 = **70**
6. 90 - 45 = **45**
7. 125 + 375 = **500**
8. 500 - 234 = **266**
9. 67 + 88 = **155**
10. 154 - 76 = **78**
11. 345 + 189 = **534**
12. 700 - 256 = **444**
13. 234 + 567 - 128 = 801 - 128 = **673**
14. 800 - 450 + 125 = 350 + 125 = **475**
15. 999 + 1 = **1000**
16. 1000 - 999 = **1**

17.4321 + 6789 = **11110**

18.9876 - 5432 = **4444**

19.12345 + 6789 - 2345 = 19134 - 2345 = **16789**

20.20000 - 12345 + 6789 = 7655 + 6789 = **14444**

Capítulo 16: Multiplicación de números naturales (21 a 40)

21.3 × 4 = **12**

22.7 × 8 = **56**

23.12 × 11 = **132**

24.15 × 5 = **75**

25.20 × 9 = **180**

26.25 × 16 = **400**

27.30 × 14 = **420**

28.40 × 25 = **1000**

29.50 × 20 = **1000**

30.60 × 15 = **900**

31.123 × 10 = **1230**

32.75 × 12 = **900**

33.87 × 13 = **1131**

34.96 × 11 = **1056**

35.123 × 45 = **5535**

36.234 × 56 = **13104**

37.321 × 65 = **20865**

38.456 × 23 = **10488**

39.567 × 34 = **19278**

40.678 × 12 = **8136**

Capítulo 17: División de números naturales (41 a 60)

41.20 ÷ 5 = **4**

42.49 ÷ 7 = **7**

43.81 ÷ 9 = **9**

44.100 ÷ 10 = **10**

45.144 ÷ 12 = **12**

46.225 ÷ 15 = **15**

47.360 ÷ 18 = **20**

48.432 ÷ 24 = **18**

49.600 ÷ 20 = **30**

50.729 ÷ 27 = **27**

51.850 ÷ 25 = **34**

52.999 ÷ 33 = **30.27** (aprox.)

53.1200 ÷ 40 = **30**

54.1350 ÷ 45 = **30**

55.1600 ÷ 50 = **32**

56.1845 ÷ 61 = **30.25** (aprox.)

57.2025 ÷ 45 = **45**

58.2500 ÷ 50 = **50**

59.2800 ÷ 70 = **40**

60.3600 ÷ 90 = **40**

Capítulo 18: Propiedades de las operaciones (61 a 70)

61.¿Es 5 + 7 = 7 + 5? Sí, **12 = 12** (Propiedad conmutativa de la suma).

62.¿Es (3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)? Sí, **7 + 5 = 3 + 9 → 12 = 12** (Propiedad asociativa de la suma).

63.6 × (4 + 3) = 6 × 7 = 42; 6 × 4 + 6 × 3 = 24 + 18 = 42 (Propiedad distributiva).

64.9 × 1 = **9** (Elemento neutro de la multiplicación).

65.7 + 0 = **7**; 0 + 7 = **7** (Elemento neutro de la suma).

66.8 × 0 = **0**; 0 × 8 = **0** (Propiedad del cero en la multiplicación).

67.10 - 3 = **7**; 3 - 10 = **-7** (No cumple propiedad conmutativa en resta).

68.(2 × 3) × 4 = 6 × 4 = 24; 2 × (3 × 4) = 2 × 12 = 24 (Propiedad asociativa de la multiplicación).

69.5 × (10 - 4) = 5 × 6 = 30; 5 × 10 - 5 × 4 = 50 - 20 = 30 (Propiedad distributiva).

70.Elemento neutro suma = **0**; Elemento neutro multiplicación = **1**

Capítulo 19: Jerarquía de operaciones (71 a 80)

71.3 + 5 × 2 = 3 + 10 = **13**

72.(3 + 5) × 2 = 8 × 2 = **16**

73.10 - 4 + 3 = 6 + 3 = **9**

74.10 - (4 + 3) = 10 - 7 = **3**

75.8 + 6 ÷ 3 = 8 + 2 = **10**

76.(8 + 6) ÷ 3 = 14 ÷ 3 ≈ **4.67**

77.20 ÷ 5 × 2 = 4 × 2 = **8**

78.20 ÷ (5 × 2) = 20 ÷ 10 = **2**

79.4 + 18 ÷ (3 + 3) = 4 + 18 ÷ 6 = 4 + 3 = **7**

80.(4 + 18) ÷ (3 + 3) = 22 ÷ 6 ≈ **3.67**

Capítulo 20: Operaciones combinadas (81 a 90)

81.5 + 3 × 2 - 4 = 5 + 6 - 4 = 7

82.(5 + 3) × (2 - 4) = 8 × (-2) = **-16**

83.10 - 6 ÷ 3 + 7 = 10 - 2 + 7 = 15

84.(10 - 6) ÷ (3 + 7) = 4 ÷ 10 = 0.4

85.4 × 3 + 12 ÷ 4 - 5 = 12 + 3 - 5 = 10

86.(4 × (3 + 12)) ÷ (4 - 5) = (4 × 15) ÷ (-1) = 60 ÷ (-1) = **-60**

87.18 ÷ 3 + 7 × 2 - 5 = 6 + 14 - 5 = 15

88.(18 ÷ (3 + 7)) × (2 - 5) = (18 ÷ 10) × (-3) = 1.8 × (-3) = **-5.4**

89.20 - 3 × 2 + (8 ÷ 4) = 20 - 6 + 2 = 16

90.(20 - (3 × 2)) + (8 ÷ 4) = (20 - 6) + 2 = 16

Capítulo 21: Estimación de resultados (91 a 100)

91.Estima 398 + 612 ≈ 400 + 600 = **1000**

92.Estima 1023 - 987 ≈ 1000 - 1000 = **0**

93.Estima 48 × 51 ≈ 50 × 50 = **2500**

94.Estima 995 ÷ 33 ≈ 1000 ÷ 30 ≈ **33**

95.Estima 678 + 789 - 456 ≈ 700 + 800 - 500 = **1000**

96.Estima 2345 ÷ 45 ≈ 2300 ÷ 50 = **46**

97.Estima 1500 + 2999 ≈ 1500 + 3000 = **4500**

98.Estima 123 × 77 ≈ 120 × 80 = **9600**

99.Estima 2500 ÷ 49 ≈ 2500 ÷ 50 = **50**

100.Estima 9999 - 4356 + 2345 ≈ 10000 - 4400 + 2300 = 10000 - 2100 = **7900**

TERCERA PARTE: NÚMEROS ENTEROS

22. Introducción a los números enteros

Los números enteros amplían el conjunto de los números naturales incluyendo sus opuestos negativos y el cero. Así, el conjunto de los enteros se representa como Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}. Su creación surgió para resolver situaciones cotidianas como deudas, temperaturas bajo cero o desplazamientos en dirección contraria. A diferencia de los naturales, que solo cuentan cantidades positivas, los enteros permiten representar cambios, pérdidas y direcciones. Se dividen en enteros positivos, enteros negativos y el cero, que actúa como punto neutro. El conjunto de los enteros es infinito en ambos sentidos. Con ellos se puede operar usando reglas que extienden las ya conocidas, permitiendo una visión más amplia de los números. Los enteros se representan en la recta numérica y tienen propiedades como el orden, la simetría respecto al cero y la existencia de opuestos. A partir de los enteros se desarrollan nuevas reglas de cálculo y razonamiento que son fundamentales para niveles superiores de matemáticas.

---

23. Suma y resta de enteros

La suma de enteros depende del signo de los números involucrados. Para sumar dos enteros con el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se conserva el signo común. Por ejemplo, (-3) + (-5) = -8. Para sumar enteros de signos distintos, se resta el menor valor absoluto del mayor y se toma el signo del número con mayor valor absoluto. Ejemplo: (-7) + 4 = -3. La resta se interpreta como una suma con el opuesto: a - b = a + (-b). Así, 5 - (-3) se transforma en 5 + 3 = 8. Es esencial comprender las reglas de los signos: positivo más positivo es positivo; negativo más negativo es negativo; positivo más negativo depende del valor absoluto. La resta entre enteros sigue estas mismas reglas una vez convertida en suma. En la práctica, estas operaciones se ilustran con modelos como la recta numérica o con ejemplos de situaciones reales: subir y bajar escaleras, ganancias y pérdidas, etc. Las operaciones con enteros son la base para la aritmética en contextos más amplios.

---

24. Multiplicación y división de enteros

La multiplicación de enteros se basa en el signo de los factores. Si se multiplican dos enteros del mismo signo, el resultado es positivo. Si se multiplican enteros de signos opuestos, el resultado es negativo. Ejemplo: (-3) × 4 = -12; (-3) × (-4) = 12. La regla general es: signo igual da positivo, signo distinto da negativo. La multiplicación puede entenderse como sumas repetidas, aunque esto se adapta cuando se trabaja con negativos. Por ejemplo, (-2) × 3 = (-2) + (-2) + (-2) = -6. La división de enteros sigue las mismas reglas de signos: cociente de dos enteros con el mismo signo es positivo; con signos distintos es negativo. La división entre enteros también implica considerar los múltiplos enteros del divisor. Ejemplo: 12 ÷ (-3) = -4. Es importante tener en cuenta que no siempre la división entre enteros da un número entero como resultado. Estas operaciones permiten resolver situaciones complejas como cambio de temperatura, operaciones financieras, y problemas

en coordenadas. La propiedad distributiva, asociativa y conmutativa se aplica también en los enteros, con sus ajustes según el signo.

---

25. Uso de la recta numérica

La recta numérica es una herramienta visual para representar números enteros y realizar operaciones con ellos. Se representa como una línea horizontal con marcas equidistantes, donde el cero se ubica en el centro, los enteros positivos a la derecha y los negativos a la izquierda. Para sumar, se avanza hacia la derecha; para restar, se retrocede hacia la izquierda. Por ejemplo, 3 + (-2) implica partir de 3 y moverse dos pasos a la izquierda, llegando a 1. También permite visualizar el concepto de opuesto: cada número tiene un opuesto a igual distancia del cero en dirección contraria. Así, el opuesto de -5 es 5. La recta numérica ayuda a comprender el orden de los enteros: cuanto más a la derecha, mayor es el número. También es útil para ilustrar desigualdades y comparar valores. Al usarla con operaciones, se puede reforzar el sentido de desplazamiento: las sumas y restas se entienden como movimientos. Esta herramienta es clave en la comprensión intuitiva de los números enteros, especialmente para estudiantes que comienzan a trabajar con números negativos.

---

26. Valor absoluto

El valor absoluto de un número entero es la distancia entre ese número y el cero en la recta numérica, sin importar la dirección. Se representa como $|a|$. Por ejemplo, $|-5| = 5$ y $|7| = 7$. El valor absoluto siempre es un número positivo o cero. Es útil en contextos donde la cantidad importa más que el signo, como la distancia, temperatura, o diferencias de altura. Matemáticamente, el valor absoluto tiene propiedades importantes: $|a| \geq 0$, $|a| = |-a|$, y $|a \times b| = |a| \times |b|$. También se usa en desigualdades: por ejemplo, $|x| < 3$ implica que x está entre -3 y 3. En operaciones con enteros, el valor absoluto ayuda a decidir qué número tiene mayor magnitud cuando se suman o restan enteros con distintos signos. Asimismo, es clave en la definición de funciones y en problemas de distancia en el plano. Comprender el valor absoluto permite un razonamiento más preciso al tratar con números negativos y positivos en diferentes contextos matemáticos y reales.

---

27. Potencias y raíces de números enteros

Las potencias de enteros implican multiplicar un número por sí mismo varias veces. Se escribe como a^n, donde a es la base y n el exponente. Si la base es negativa y el exponente par, el resultado es positivo. Si el exponente es impar, el resultado es negativo. Por ejemplo, $(-2)^2 = 4$, $(-2)^3 = -8$. Si el exponente es cero, el resultado es 1, excepto cuando la base también es cero. Las raíces enteras son operaciones inversas a la potenciación. La raíz cuadrada de un número entero es el número que al multiplicarse por sí mismo da como resultado ese número. Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$. Las raíces de números negativos no tienen resultado en los enteros si se trabaja dentro de los números reales, ya que no existe un número entero que multiplicado por sí mismo dé un negativo. Las potencias tienen propiedades como $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$ y $a^0 = 1$. Estas propiedades se aplican también en la resolución de expresiones algebraicas y problemas. Entender cómo funcionan las potencias y raíces con enteros permite manejar cálculos más complejos y sentar bases para el álgebra.

---

28. Problemas con números enteros

Los problemas con números enteros permiten aplicar los conocimientos adquiridos en contextos reales. Se pueden plantear situaciones como transacciones económicas (ganancias y pérdidas), temperaturas (subidas y bajadas), niveles de un edificio (pisos sobre y bajo el suelo), movimientos en una recta, y más. Es esencial interpretar correctamente los signos para establecer operaciones adecuadas. Por ejemplo, si una persona debe 20 euros (–20) y paga 15 (+15), el resultado es –5, lo que indica que aún debe dinero. Otro ejemplo es: si la temperatura baja de 3 ºC a –4 ºC, la diferencia es –7 ºC. En la resolución de estos problemas se emplean estrategias como representar en la recta numérica, descomponer operaciones, o traducir enunciados a lenguaje algebraico. Resolver problemas con enteros fortalece la comprensión del signo, del orden, del valor absoluto y de las propiedades operativas. Además, se fomenta el razonamiento lógico y la habilidad para modelar situaciones cotidianas con lenguaje matemático, una competencia esencial en todos los niveles educativos.

Ejercicios con soluciones – Tercera Parte: Numeros Enteros

---

1. ¿Qué conjunto incluye a los números -5, 0 y 7?
   Z (números enteros)
2. ¿Cuál es el opuesto de -9?
   9
3. ¿Cuál es el valor absoluto de -4?
   4
4. ¿Qué número es mayor: -3 o -7?
   -3
5. Representa en la recta numérica el número -6. ¿A qué distancia del cero está?
   6 unidades
6. Suma: -3 + (-2)
   -5
7. Suma: -8 + 5
   -3
8. Resta: 7 - (-4)
   11
9. Resta: -6 - 3
   -9
10. Multiplica: (-3) × 4
    -12
11. Multiplica: (-5) × (-2)
    10
12. Divide: (-12) ÷ 3
    -4
13. Divide: 20 ÷ (-4)
    -5
14. ¿Qué número entero sigue a -1 en la recta numérica?
    0
15. ¿Qué número entero está antes de 0?
    -1
16. Suma: -2 + 6
    4

17.Resta: -10 - (-5)
-5

18.Multiplica: 0 × (-7)
0

19.Divide: 0 ÷ 3
0

20.Divide: 5 ÷ (-1)
-5

21.¿Cuál es el valor absoluto de 0?
0

22.|7| + |-3|
10

23.|-8| - |5|
3

24.¿Qué número entero tiene el mismo valor absoluto que -11?
11

25.¿Qué entero es mayor: -15 o -2?
-2

26.-3 + 3
0

27.6 - 10
-4

28.(-4) × 2 × (-1)
8

29.$(–2)^3$
-8

30.$(–3)^2$
9

31.¿Cuánto es √36?
6

32.¿Cuánto es √49?
7

33.¿Cuánto es $(–5)^2 – (–3)^2$?
25 – 9 = 16

34.Si subo 3 pisos desde el -2, ¿en qué piso estoy?
1

35.Si la temperatura es -5 ºC y sube 7 grados, ¿cuál es la nueva temperatura?
2 ºC

36.8 + (–12)
-4

37.15 + (–10) + (–3)
2

38.5 × (–4) × (–1)
20

39.(–6) ÷ 2 × (–3)
-9

40.(–8) ÷ (–4)
2

41.$(–2)^4$
16

42.$(–2)^5$
-32

43.|–7| + 2
9

44.|–3 – 5|
8

45.–(–6)
6

46.–|–4|
-4

47.(–3 + 5) × (–2)
–4

48.(–5) + (–10) + 15
0

49.12 + (–5) – (–3)
10

50.Si un ascensor baja de 4 a –2, ¿cuántos pisos bajó?
6

51.El número opuesto de 0
0

52.|–12| – |–5|
7

53.(–10 + 2) × (–3)
24

54.(–4 × –2) + (–3)
5

55.–9 – (–9)
0

56.(–5 – 5) ÷ 5
-2

57.El producto de tres enteros negativos es…
Negativo

58.El producto de dos enteros negativos es…
Positivo

59.El producto de un entero positivo y uno negativo es…
Negativo

60.|–2 × 3|
6

61.(–6 + 4) × 2
-4

62.$(–7)^2 – 5 \times 2$
$49 – 10 = 39$

63.¿Cuánto es $(–2)^2 + (–2)^3$?
$4 + (–8) = -4$

64.(–3 × –3) – (–4)
9 + 4 = 13

65.La raíz cuadrada de 81
9

66.$(–6)^2 + 2 \times (–5)$
$36 – 10 = 26$

67.7 – (–2) × 3
7 – (–6) = 13

68.(–2) × [(–4) + 5]
–2

69.$(–3 – 2)^2$
25

70.Si una deuda de –20 se reduce en 8, ¿cuánto queda?
-12

71.6 × (–2 + 1)
–6

72.(–10) ÷ (2 – 7)
–10 ÷ (–5) = 2

73.[(–3) + 6] × (–2)
–6

74.$(-4) - [(-3) - 2]$
$-4 - (-5) = 1$

75.$[(-6)^2 - 36] \div 6$
0

76.El producto de –2, –3 y –4
–24

77.$(-5 + 2)^2$
9

78.$-2 \times (3 - 5)$
$-2 \times (-2) = 4$

79.$|-8 - 3|$
11

80.$10 - (-10)$
20

81.$|-2 \times (4 - 7)|$
6

82.$(-7) - (-7) + (-7)$
–7

83.Si subes 5 pisos desde el piso –3, ¿dónde estás?
Piso 2

84.$(-3)^3 + (-2)^2$
$-27 + 4 = -23$

85.$|-9| - (-3)$
12

86.¿Cuál es mayor: $-5 + 4$ o $-2 - 2$?
$-1 > -4$

87.$(-6 + 8)^2$
4

88.$(-7 + 4) \times (-3 + 1)$
$-3 \times (-2) = 6$

89.$-(-8 + 2)$
–6

90.$|(-4)^2 - (-2)^2|$
$16 - 4 = 12$

91.Si tienes –15 euros y te dan 20, ¿cuánto tienes?
5

92.$[(-3 + 3) \times 4] \div 2$
0

93.[(–2) × (–2)] – (–2)
4 + 2 = 6

94.[(–5 + 10) × (–1)]
–5

95.–|–4 + 6|
–2

96.–[(–2) + 3]
–1

97.2 – 5 + (–3)
–6

98.4 × [(–2) + 1]
–4

99.$(–5)^2 + (–3)^2$
25 + 9 = 34

100.(–4 – 6) × (–1)
10

¿Te gustaría que te los entregue también en un archivo de texto plano descargable o en PDF?

CUARTA PARTE: FRACCIONES Y DECIMALES

---

29. Concepto de fracción

Una fracción es una forma de representar una parte de un todo. Se compone de dos números: el numerador, que indica cuántas partes se toman, y el denominador, que indica en cuántas partes se divide el todo. Por ejemplo, en la fracción 3/4, el número 3 es el numerador y el número 4 es el denominador, lo cual significa que se toman tres partes de un total de cuatro. Las fracciones pueden representar cantidades menores o mayores que uno. Cuando el numerador es menor que el denominador, se trata de una fracción propia. Si el numerador es igual al denominador, la fracción equivale a uno. Cuando el numerador es mayor que el denominador, la fracción es impropia y representa una cantidad mayor que uno. Las fracciones se utilizan para expresar divisiones, proporciones, repartos y mediciones que no se pueden expresar con números enteros.

---

30. Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad, aunque tengan números diferentes en el numerador y el denominador. Por ejemplo, 1/2, 2/4 y 4/8 son fracciones equivalentes porque todas representan la mitad de un todo. Para obtener fracciones equivalentes, se puede multiplicar o dividir el numerador y el denominador por el mismo número diferente de cero. Este procedimiento no cambia el valor de la fracción, ya que se está multiplicando por una forma del uno. Las fracciones equivalentes son útiles para comparar, simplificar o sumar fracciones.

---

31. Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción consiste en reducirla a su mínima expresión, es decir, encontrar una fracción equivalente con los números más pequeños posibles. Para simplificar una fracción se debe dividir el numerador y el denominador por su máximo común divisor. Por ejemplo, la fracción 18/24 puede simplificarse dividiendo ambos términos por 6, que es su máximo común divisor, obteniendo así la fracción 3/4. Una fracción ya está simplificada si el numerador y el denominador son primos entre sí, es decir, no tienen divisores comunes excepto el uno.

---

32. Comparación de fracciones

Para comparar fracciones y saber cuál es mayor, menor o si son iguales, hay varias estrategias. Una de ellas consiste en convertir las fracciones al mismo denominador, y luego comparar los numeradores. Otra opción es convertirlas a decimales y comparar los valores resultantes. También se puede usar el producto cruzado, multiplicando en diagonal numerador con denominador de la otra fracción, para ver cuál producto es mayor. Comparar fracciones es útil en contextos como repartir cantidades, tomar decisiones y resolver problemas cotidianos.

---

33. Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador, simplemente se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador. Por ejemplo, 2/5 + 1/5 = 3/5. Si las fracciones tienen

denominadores diferentes, primero se deben convertir a fracciones equivalentes con un denominador común, generalmente el mínimo común múltiplo de los denominadores. Luego se suman o restan los numeradores y se simplifica el resultado si es posible. Este proceso es esencial para realizar operaciones básicas con fracciones en múltiples situaciones.

---

34. Multiplicación de fracciones
Multiplicar fracciones es más sencillo que sumarlas. Se multiplican directamente los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Por ejemplo, 2/3 × 4/5 = 8/15. Después de multiplicar, se puede simplificar el resultado. También es posible simplificar antes de multiplicar, cancelando factores comunes en cruz. La multiplicación de fracciones se aplica a problemas de proporciones, cálculo de áreas parciales, repartos y recetas.

---

35. División de fracciones
Dividir fracciones consiste en multiplicar la primera fracción por el inverso de la segunda. El inverso de una fracción es aquella que se obtiene intercambiando el numerador y el denominador. Por ejemplo, para dividir 3/4 ÷ 2/5 se multiplica 3/4 × 5/2, lo que da 15/8. Luego se puede simplificar o expresar como fracción mixta. La división de fracciones permite resolver problemas donde una cantidad se reparte en partes no enteras o se calcula cuántas veces cabe una cantidad en otra.

---

36. Fracciones mixtas e impropias
Una fracción mixta es aquella que combina un número entero y una fracción propia, como 2 1/3. Representa una cantidad mayor que uno. Las fracciones impropias, como 7/4, también representan cantidades mayores que uno, pero sólo usan numerador y denominador. Para convertir una fracción impropia en mixta, se divide el numerador entre el denominador y el residuo se expresa como fracción. Para pasar de mixta a impropia, se multiplica el entero por el denominador y se suma el numerador. Estas conversiones permiten expresar resultados de forma más clara o adecuada según el contexto.

---

37. Introducción a los decimales
Los decimales son otra forma de representar fracciones, especialmente aquellas con denominadores de 10, 100, 1000, etc. Se escriben utilizando una coma o punto decimal, seguido de una parte decimal. Por ejemplo, 0,75 equivale a 75 centésimas o 75/100. Los decimales permiten expresar medidas y cantidades de manera más sencilla en ciertos contextos como el dinero, la ciencia o la tecnología. Existen decimales exactos (que terminan) y decimales periódicos (que tienen una parte que se repite infinitamente).

---

38. Conversión entre fracción y decimal
Para convertir una fracción en decimal, se divide el numerador entre el denominador. El resultado puede ser exacto o periódico. Por ejemplo, 1/4 = 0,25 y 1/3 = 0,333.... Para convertir un decimal a fracción, se analiza el número de cifras decimales. Por ejemplo, 0,6 se convierte en 6/10 y luego se simplifica a 3/5. En caso de decimales periódicos, se utilizan métodos algebraicos para hallar su

fracción equivalente. La conversión entre fracción y decimal permite usar la forma más conveniente según el problema.

---

39. Suma, resta, multiplicación y división con decimales
Para operar con decimales, es importante alinear correctamente las cifras decimales. En la suma y resta, se colocan las comas una debajo de la otra. En la multiplicación, se multiplica normalmente ignorando las comas y al final se cuenta el total de cifras decimales en ambos factores para ubicar la coma en el producto. En la división, si el divisor no es entero, se mueve la coma en ambos números para hacer la división más fácil. Las operaciones con decimales se aplican a la resolución de problemas financieros, mediciones y cálculos científicos.

---

40. Redondeo y truncamiento de decimales
El redondeo es el proceso de aproximar un número decimal a una cierta cantidad de cifras, siguiendo una regla: si la cifra siguiente es mayor o igual a 5, se suma una unidad; si es menor que 5, se deja igual. El truncamiento consiste en cortar las cifras decimales después de cierta posición, sin hacer ningún ajuste. Por ejemplo, redondear 3,476 a dos decimales da 3,48, mientras que truncar da 3,47. Estas técnicas son útiles para simplificar resultados, limitar errores y facilitar cálculos.

---

41. Porcentaje y tanto por uno
El porcentaje es una forma de expresar una parte de cien. Se indica con el símbolo %. Por ejemplo, 25% equivale a 25/100 o 0,25. El tanto por uno es una manera similar de expresar fracciones decimales, donde 1 equivale al total y 0,25 equivale a una cuarta parte. Estas representaciones se usan ampliamente en estadísticas, economía, educación y muchos otros campos para comparar cantidades y proporciones.

---

42. Aumentos y descuentos porcentuales
Un aumento porcentual se calcula multiplicando el valor original por un porcentaje y sumándolo al valor original. Un descuento porcentual se calcula igual, pero se resta. Por ejemplo, un 20% de descuento sobre 100 euros es $100 \times 0{,}20 = 20$ euros, y el precio final será 80 euros. Este tipo de cálculo es común en situaciones comerciales, financieras y cotidianas, y permite entender cómo cambian los valores en relación a un porcentaje dado.

---

43. Interés simple
El interés simple es una forma de calcular el dinero ganado o pagado por el uso de un capital durante un cierto tiempo. Se calcula con la fórmula $I = C \times r \times t$, donde I es el interés, C es el capital, r es la tasa de interés en forma decimal y t es el tiempo. El interés simple se usa en préstamos, inversiones y depósitos a corto plazo. A diferencia del interés compuesto, el interés simple no se acumula sobre intereses anteriores, lo cual lo hace más fácil de calcular y entender.

Ejercicios con soluciones – Cuarta Parte: Fracciones y Decimales

---

1. Escribe la fracción que representa tres partes de ocho.
   Solución: 3/8
2. ¿Cuál es la fracción equivalente a 2/3 con denominador 9?
   Solución: 6/9
3. Simplifica la fracción 12/16.
   Solución: 3/4
4. ¿Cuál es mayor: 5/6 o 3/4?
   Solución: 5/6
5. Suma 2/5 + 1/5.
   Solución: 3/5
6. Resta 7/8 - 3/8.
   Solución: 4/8 = 1/2
7. Suma 1/2 + 2/3.
   Solución: 7/6
8. Resta 3/4 - 5/6.
   Solución: -1/12
9. Multiplica 2/3 × 3/4.
   Solución: 6/12 = 1/2
10. Multiplica 5/8 × 4/7.
    Solución: 20/56 = 5/14
11. Divide 3/5 ÷ 2/3.
    Solución: 9/10
12. Divide 7/9 ÷ 1/6.
    Solución: 42/9 = 14/3
13. Convierte 11/4 a fracción mixta.
    Solución: 2 3/4
14. Convierte 3 2/5 a fracción impropia.
    Solución: 17/5
15. Escribe el número decimal equivalente a 3/4.
    Solución: 0.75
16. Escribe el número decimal equivalente a 1/5.
    Solución: 0.2
17. Convierte 0.6 a fracción.
    Solución: 3/5

18.Convierte 0.125 a fracción.
Solución: 1/8

19.Suma 2.3 + 1.4.
Solución: 3.7

20.Resta 5.6 - 2.2.
Solución: 3.4

21.Multiplica 1.2 × 3.4.
Solución: 4.08

22.Divide 7.5 ÷ 2.5.
Solución: 3

23.Redondea 4.768 a una cifra decimal.
Solución: 4.8

24.Trunca 9.567 a dos cifras decimales.
Solución: 9.56

25.¿Cuál es el 20% de 150?
Solución: 30

26.¿Qué número representa el 25% de 80?
Solución: 20

27.Aumenta un número 120 en un 10%.
Solución: 132

28.Disminuye 200 en un 15%.
Solución: 170

29.Si C = 1000, r = 0.05, t = 2 años, calcula el interés simple.
Solución: 100

30.¿Qué fracción representa la mitad de 3/4?
Solución: 3/8

31.¿Qué fracción representa el doble de 2/5?
Solución: 4/5

32.Ordena de menor a mayor: 1/2, 2/3, 3/5.
Solución: 3/5, 1/2, 2/3

33.¿Cuántas veces cabe 2/3 en 4/5?
Solución: 10/12 = 5/6

34.Convierte 0.333… a fracción.
Solución: 1/3

35.Convierte 0.625 a fracción.
Solución: 5/8

36.Suma 0.7 + 1.25.
Solución: 1.95

37. Resta 3.6 - 0.9.
    Solución: 2.7

38. Multiplica 0.3 × 0.4.
    Solución: 0.12

39. Divide 1.2 ÷ 0.3.
    Solución: 4

40. Redondea 3.14159 a tres cifras decimales.
    Solución: 3.142

41. Trunca 2.9876 a una cifra decimal.
    Solución: 2.9

42. El 10% de un número es 15. ¿Cuál es el número?
    Solución: 150

43. El 30% de un número es 24. ¿Cuál es el número?
    Solución: 80

44. Un producto cuesta 250€. Le aplican un 20% de descuento. ¿Precio final?
    Solución: 200€

45. Un producto sube un 12% desde 180€. ¿Nuevo precio?
    Solución: 201.6€

46. Interés simple de 500€ al 4% durante 3 años.
    Solución: 60€

47. ¿Cuál es la fracción simplificada de 24/36?
    Solución: 2/3

48. Simplifica 45/60.
    Solución: 3/4

49. Suma 7/10 + 9/20.
    Solución: 23/20 = 1 3/20

50. Resta 5/6 - 1/3.
    Solución: 1/2

51. Multiplica 9/10 × 4/9.
    Solución: 36/90 = 2/5

52. Divide 6/7 ÷ 3/14.
    Solución: 4

53. Convierte 7 1/2 a fracción impropia.
    Solución: 15/2

54. Convierte 13/5 a fracción mixta.
    Solución: 2 3/5

55. Convierte 0.2 a fracción.
    Solución: 1/5

56.Convierte 0.04 a fracción.
Solución: 1/25

57.Suma 0.9 + 0.8.
Solución: 1.7

58.Resta 2.05 - 1.75.
Solución: 0.3

59.Multiplica 2.5 × 4.1.
Solución: 10.25

60.Divide 6.3 ÷ 2.1.
Solución: 3

61.Redondea 5.6789 a dos cifras decimales.
Solución: 5.68

62.Trunca 7.432 a una cifra decimal.
Solución: 7.4

63.¿Qué porcentaje es 12 de 48?
Solución: 25%

64.¿Qué porcentaje es 18 de 60?
Solución: 30%

65.El 15% de un número es 45. ¿Cuál es el número?
Solución: 300

66.El 8% de un número es 24. ¿Cuál es el número?
Solución: 300

67.Descuento del 30% sobre 120€. ¿Precio final?
Solución: 84€

68.Aumento del 25% sobre 160€. ¿Nuevo precio?
Solución: 200€

69.Interés simple de 800€ al 6% durante 5 años.
Solución: 240€

70.¿Qué número decimal representa 2/5?
Solución: 0.4

71.¿Qué número decimal representa 5/8?
Solución: 0.625

72.Convierte 0.875 a fracción.
Solución: 7/8

73.Convierte 0.2 periódico a fracción.
Solución: 2/9

74.Redondea 1.996 a una cifra decimal.
Solución: 2.0

75. Trunca 4.789 a dos cifras decimales.
    Solución: 4.78

76. ¿Qué número representa el 12.5% de 64?
    Solución: 8

77. ¿Qué número representa el 5% de 200?
    Solución: 10

78. Aumento del 15% sobre 300€. ¿Nuevo precio?
    Solución: 345€

79. Descuento del 10% sobre 90€. ¿Precio final?
    Solución: 81€

80. Interés simple de 1500€ al 3% durante 4 años.
    Solución: 180€

81. Simplifica 50/100.
    Solución: 1/2

82. Simplifica 42/56.
    Solución: 3/4

83. Suma 3/10 + 2/15.
    Solución: 19/30

84. Resta 7/12 - 5/18.
    Solución: 11/36

85. Multiplica 4/5 × 3/8.
    Solución: 12/40 = 3/10

86. Divide 5/6 ÷ 10/9.
    Solución: 3/4

87. Convierte 2 1/6 a fracción impropia.
    Solución: 13/6

88. Convierte 11/3 a fracción mixta.
    Solución: 3 2/3

89. Convierte 0.09 a fracción.
    Solución: 9/100

90. Convierte 0.6 periódico a fracción.
    Solución: 2/3

91. Suma 0.4 + 1.2.
    Solución: 1.6

92. Resta 5.5 - 2.3.
    Solución: 3.2

93. Multiplica 0.25 × 0.6.
    Solución: 0.15

94. Divide 2.4 ÷ 1.2.
    Solución: 2

95. Redondea 8.365 a una cifra decimal.
    Solución: 8.4

96. Trunca 6.789 a tres cifras decimales.
    Solución: 6.789

97. ¿Qué porcentaje es 9 de 60?
    Solución: 15%

98. ¿Qué porcentaje es 5 de 25?
    Solución: 20%

99. Aumento del 18% sobre 500€. ¿Nuevo precio?
    Solución: 590€

100. Interés simple de 2000€ al 7% durante 3 años.
    Solución: 420€

QUINTA PARTE: MAGNITUDES Y MEDIDAS

44.RAZÓN Y PROPORCIÓN

Una razón es una comparación entre dos cantidades mediante una división. Se representa como a:b o a/b. Por ejemplo, si hay 4 manzanas y 2 naranjas, la razón es 4:2 o 2:1 simplificada. Una proporción es una igualdad entre dos razones. Por ejemplo, si a/b = c/d, se dice que hay una proporción entre a, b, c y d. En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios: a*d* = *b*c. Las proporciones permiten comparar cantidades diferentes y resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa.

45.REPARTOS PROPORCIONALES

Un reparto proporcional consiste en dividir una cantidad total entre varias personas u objetos en proporción a ciertos valores asignados. Se distinguen dos tipos: reparto directamente proporcional y reparto inversamente proporcional. En un reparto directamente proporcional, se asigna más a quien tiene más peso en la proporción. En el inverso, se asigna más a quien tiene menos. Para hacer un reparto directamente proporcional, se suman los valores asignados, se calcula el valor de una parte y luego se multiplica por cada valor. En el inversamente proporcional, se hace con los inversos de los valores asignados.

46.REGLA DE TRES SIMPLE

La regla de tres simple es un procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad directa o inversa entre tres valores conocidos y uno desconocido. Se establece una proporción entre dos magnitudes y se despeja el valor incógnita. En los casos de proporcionalidad directa, si aumenta una magnitud, también aumenta la otra. En los casos de proporcionalidad inversa, si aumenta una, la otra disminuye. Se aplica la fórmula: x = (b * c) / a si es directa. Si es inversa: x = (a * b) / c. Es útil para resolver problemas cotidianos de precios, tiempos, distancias, etc.

47.REGLA DE TRES COMPUESTA

La regla de tres compuesta se usa cuando intervienen más de dos magnitudes relacionadas. Se plantean las magnitudes en una tabla, se determina el tipo de proporcionalidad de cada una con respecto a la incógnita, y se aplica una fórmula general. Se multiplican los valores conocidos y se dividen por los correspondientes de la incógnita, cuidando el sentido de la proporcionalidad. Es útil en problemas donde intervienen tiempo, trabajadores, producción, consumo, velocidad, entre otros. Permite hallar valores complejos a partir de varios datos proporcionales.

48.PORCENTAJE COMO PROPORCIÓN

El porcentaje representa una proporción con denominador 100. Se expresa con el símbolo %. Por ejemplo, 25% es 25/100 o 0.25. Se usa para expresar aumentos, descuentos, intereses, impuestos, entre otros. Para calcular un porcentaje de una cantidad se multiplica la cantidad por el porcentaje expresado como fracción o decimal. Para calcular qué porcentaje representa una parte de un total, se divide la parte entre el total y se multiplica por 100. El porcentaje es una forma de razón que facilita la comparación entre distintas cantidades con base en 100.

49.APLICACIONES PRÁCTICAS DE PROPORCIONES

Las proporciones se aplican en muchos contextos prácticos como la cocina, la construcción, el comercio, la ciencia, la economía, la estadística y la medicina. En la cocina se usan para

duplicar o reducir recetas. En el comercio, para calcular precios, descuentos, ganancias y pérdidas. En la medicina, para dosificar medicamentos según peso o edad. En física, para relacionar tiempo, velocidad y distancia. En estadística, para interpretar datos y probabilidades. El dominio de las proporciones permite resolver con lógica y rapidez múltiples situaciones reales de la vida diaria.

Ejercicios con soluciones – Quinta Parte: Fracciones y Decimales

---

1. Escribe los primeros 5 múltiplos de 6.
   Solución: 6, 12, 18, 24, 30
2. Escribe los divisores de 18.
   Solución: 1, 2, 3, 6, 9, 18
3. ¿Es 17 un número primo?
   Solución: Sí
4. ¿Es 21 un número compuesto?
   Solución: Sí
5. ¿Cuál es el MCD de 12 y 18?
   Solución: 6
6. ¿Cuál es el mcm de 4 y 10?
   Solución: 20
7. Di si 135 es divisible entre 5.
   Solución: Sí
8. Di si 246 es divisible entre 3.
   Solución: Sí
9. ¿Es 97 un número primo?
   Solución: Sí
10. ¿Es 51 divisible entre 17?
    Solución: Sí
11. Halla el MCD de 45 y 60.
    Solución: 15
12. Halla el mcm de 6 y 8.
    Solución: 24
13. ¿Qué es mayor: MCD(8, 12) o mcm(2, 3)?
    Solución: mcm(2, 3) = 6 > MCD(8, 12) = 4
14. ¿Es 100 divisible entre 2 y 5?
    Solución: Sí
15. ¿Cuántos divisores tiene 36?
    Solución: 9 divisores
16. Di si 341 es primo.
    Solución: No

17.MCD de 16, 24 y 32.
Solución: 8

18.mcm de 5, 10, 15.
Solución: 30

19.¿Es 81 divisible entre 9?
Solución: Sí

20.¿Es 51 número primo?
Solución: No

21.Halla los múltiplos de 9 menores de 50.
Solución: 9, 18, 27, 36, 45

22.¿Es 243 divisible entre 3?
Solución: Sí

23.¿El número 111 es primo?
Solución: No

24.Escribe 4 números primos consecutivos.
Solución: 2, 3, 5, 7

25.¿Es 200 divisible entre 4?
Solución: Sí

26.¿Qué número es múltiplo de 7 y 5 a la vez?
Solución: 35

27.Halla el MCD de 20 y 14.
Solución: 2

28.¿Qué número entre 1 y 10 no es ni primo ni compuesto?
Solución: 1

29.¿Es 123 divisible entre 3?
Solución: Sí

30.¿Es 99 número compuesto?
Solución: Sí

31.¿Cuál es el mcm de 3 y 7?
Solución: 21

32.Halla el MCD de 36 y 48.
Solución: 12

33.¿Qué número menor que 10 es primo y impar?
Solución: 3, 5, 7

34.¿Cuál es el menor múltiplo común de 9 y 12?
Solución: 36

35.¿Es 289 número primo?
Solución: No

36.¿Cuántos múltiplos de 4 hay entre 10 y 30?
Solución: 5 (12, 16, 20, 24, 28)

37.¿Es 143 divisible entre 11?
Solución: Sí

38.Di si 125 es divisible entre 5.
Solución: Sí

39.MCD de 28 y 70.
Solución: 14

40.mcm de 9 y 15.
Solución: 45

41.¿Es 63 primo?
Solución: No

42.¿Es 256 número compuesto?
Solución: Sí

43.¿Cuál es el primer número múltiplo de 12 mayor que 50?
Solución: 60

44.MCD de 100 y 80.
Solución: 20

45.mcm de 8 y 14.
Solución: 56

46.Escribe 3 múltiplos de 11.
Solución: 11, 22, 33

47.Di si 151 es primo.
Solución: Sí

48.Escribe todos los divisores de 40.
Solución: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

49.¿Es 48 divisible entre 6?
Solución: Sí

50.mcm de 10 y 25.
Solución: 50

51.MCD de 81 y 27.
Solución: 27

52.¿Cuántos divisores tiene 60?
Solución: 12

53.¿Es 91 divisible entre 7?
Solución: Sí

54.¿Es 18 número primo?
Solución: No

55.¿Qué número tiene exactamente 2 divisores?
Solución: cualquier número primo

56.Escribe dos números compuestos entre 10 y 15.
Solución: 12, 14

57.mcm de 4, 6 y 8.
Solución: 24

58.MCD de 36, 60.
Solución: 12

59.Di si 222 es divisible entre 6.
Solución: Sí

60.¿Es 37 número primo?
Solución: Sí

61.¿Es 51 divisible entre 17?
Solución: Sí

62.Escribe tres números primos mayores que 100.
Solución: 101, 103, 107

63.¿Es 87 divisible entre 3?
Solución: Sí

64.MCD de 9 y 33.
Solución: 3

65.mcm de 9 y 12.
Solución: 36

66.¿Es 144 divisible entre 12?
Solución: Sí

67.¿Es 2 un número primo?
Solución: Sí

68.¿Es 91 número primo?
Solución: No

69.¿Cuál es el menor múltiplo de 18 mayor que 100?
Solución: 108

70.¿Qué número tiene 1 y él mismo como únicos divisores?
Solución: un número primo

71.Escribe un número que sea múltiplo de 6 y 10.
Solución: 30

72.MCD de 40 y 64.
Solución: 8

73.mcm de 3, 5, 6.
Solución: 30

74.¿Es 35 número compuesto?
Solución: Sí

75.¿Es 28 divisible entre 7?
Solución: Sí

76.¿Cuántos divisores tiene 45?
Solución: 6

77.Escribe los 5 primeros múltiplos de 7.
Solución: 7, 14, 21, 28, 35

78.MCD de 25 y 40.
Solución: 5

79.mcm de 20 y 15.
Solución: 60

80.¿Es 49 número primo?
Solución: No

81.¿Cuál es el menor número primo mayor que 10?
Solución: 11

82.¿Es 91 divisible entre 13?
Solución: Sí

83.MCD de 12 y 30.
Solución: 6

84.mcm de 18 y 24.
Solución: 72

85.¿Qué número primo es par?
Solución: 2

86.¿Es 111 divisible entre 3?
Solución: Sí

87.¿Es 221 número primo?
Solución: No

88.MCD de 32 y 40.
Solución: 8

89.mcm de 3 y 4.
Solución: 12

90.¿Cuántos múltiplos de 10 hay menores de 100?
Solución: 9

91.Escribe un número compuesto menor que 10.
Solución: 4

92.Escribe los divisores de 27.
Solución: 1, 3, 9, 27

93.¿Es 231 divisible entre 3 y 7?
Solución: Sí

94.¿Es 39 número compuesto?
Solución: Sí

95.mcm de 2 y 9.
Solución: 18

96.MCD de 9 y 18.
Solución: 9

97.¿Es 333 divisible entre 3?
Solución: Sí

98.¿Es 97 número compuesto?
Solución: No

99.¿Cuál es el mayor divisor común de 11 y 121?
Solución: 11

100.mcm de 5 y 8.
Solución: 40

SEXTA PARTE: MAGNITUDES Y MEDIDAS

50. Sistemas de unidades

Un sistema de unidades es un conjunto coherente de unidades que se emplean para medir diferentes magnitudes. Las magnitudes son propiedades que pueden medirse, como la longitud, la masa, el tiempo o la temperatura. El sistema más usado a nivel internacional es el Sistema Internacional de Unidades (SI), que se basa en siete unidades fundamentales: metro (longitud), kilogramo (masa), segundo (tiempo), amperio (corriente eléctrica), kelvin (temperatura), mol (cantidad de sustancia) y candela (intensidad luminosa). A partir de estas unidades fundamentales se derivan otras como el metro cuadrado para el área o el metro cúbico para el volumen. En algunos países, además del SI, se usan otros sistemas como el sistema inglés o el sistema técnico. Conocer un sistema de unidades permite realizar mediciones correctas y comunicar resultados con claridad y precisión.

---

51. Longitud, masa y capacidad

La longitud mide la distancia entre dos puntos. Su unidad básica en el SI es el metro. Se utilizan múltiplos y submúltiplos como kilómetro, centímetro o milímetro. La masa indica la cantidad de materia de un cuerpo, y su unidad básica es el kilogramo. Se relacionan otras unidades como el gramo, tonelada o miligramo. La capacidad mide el volumen que puede contener un recipiente, y su unidad básica es el litro. También se usan mililitros, centilitros, decalitros, etc. Es importante aprender a pasar de una unidad a otra, sabiendo que estas conversiones siguen una escala decimal. Por ejemplo, 1 km = 1000 m, 1 kg = 1000 g, 1 l = 1000 ml. Estas magnitudes están presentes en la vida diaria y en problemas matemáticos aplicados.

---

52. Tiempo: días, horas, minutos y segundos

El tiempo es una magnitud que se emplea para ordenar eventos y medir su duración. Las unidades de tiempo no siguen un sistema decimal. Un día tiene 24 horas, una hora 60 minutos y un minuto 60 segundos. También se usan otras unidades como la semana (7 días), el mes (28 a 31 días), el año (365 o 366 días). Para trabajar con estas unidades es necesario saber sumar, restar, multiplicar y dividir cantidades de tiempo. Por ejemplo, para convertir 2 horas y 45 minutos en minutos, se multiplica 2×60 y se suman los 45: el resultado es 165 minutos. En problemas con tiempo se deben tener en cuenta los cambios entre unidades y prestar atención a las horas del día y las fracciones de tiempo.

---

53. Área y volumen

El área es la medida de la superficie de una figura y se expresa en unidades cuadradas. Las más comunes son metro cuadrado (m^2), centímetro cuadrado (cm^2) o hectárea (ha). El volumen mide el espacio que ocupa un cuerpo tridimensional y se expresa en unidades cúbicas, como metro cúbico (m^3), litro (l) o centímetro cúbico (cm^3). Para calcular áreas y volúmenes existen fórmulas según la figura. Por ejemplo, área del rectángulo es base por altura, área del triángulo es base por altura dividido entre 2, y volumen del prisma es área de la base por altura. Es fundamental identificar la figura y aplicar correctamente la fórmula. En la práctica, el área se relaciona con suelos, paredes o terrenos, y el volumen con envases, depósitos o espacios tridimensionales.

---

54. Conversión de unidades
Convertir unidades consiste en expresar una misma cantidad en diferentes unidades. Dentro del mismo sistema, se usan factores de conversión, que son potencias de 10 en el sistema métrico. Por ejemplo, para convertir 3 metros a centímetros se multiplica por 100, porque 1 metro = 100 centímetros. Cuando se trata de unidades de tiempo o unidades anglosajonas, los factores no son decimales. Para convertir unidades compuestas, como km/h a m/s, se convierten por separado numerador y denominador. En problemas con diferentes unidades, es esencial unificar las medidas antes de operar. También se pueden usar tablas o escalas para visualizar la relación entre unidades y facilitar las conversiones.

---

55. Escalas y mapas
La escala es la relación entre las dimensiones reales de un objeto o lugar y su representación en un plano o mapa. Se expresa como una fracción o proporción, por ejemplo, 1:1000 significa que 1 unidad en el plano equivale a 1000 unidades en la realidad. Existen escalas numéricas (como 1:50000) y gráficas (una línea graduada que representa distancias reales). Para usar una escala hay que multiplicar la medida del plano por el denominador de la escala para obtener la medida real. También se puede hacer la operación inversa para obtener la medida en el mapa. Las escalas son muy útiles en geografía, arquitectura y diseño técnico, y permiten representar objetos muy grandes o muy pequeños de manera manejable.

---

56. Problemas con unidades compuestas
Las unidades compuestas son aquellas que resultan de combinar dos magnitudes, como velocidad (km/h), densidad (kg/m³), consumo (l/100 km), etc. Resolver problemas con estas unidades implica comprender su significado y saber operar con ellas. Por ejemplo, si un coche va a 90 km/h y viaja 2 horas, la distancia recorrida es 90×2 = 180 km. Si se conoce el consumo por kilómetro, se puede calcular el gasto total multiplicando por la distancia. Para resolver estos problemas es fundamental identificar la unidad compuesta, relacionarla con las magnitudes involucradas y aplicar una regla de tres o una fórmula adecuada. También hay que prestar atención a la coherencia de unidades y hacer conversiones cuando sea necesario.

Ejercicios con soluciones – Sexta Parte: Fracciones y Decimales

1. Convierte 5,3 km a metros
   Solución: 5300 m
2. Convierte 2500 m a km
   Solución: 2,5 km
3. Convierte 120 cm a metros
   Solución: 1,2 m
4. Convierte 0,45 m a centímetros
   Solución: 45 cm
5. Convierte 3,6 litros a mililitros
   Solución: 3600 ml
6. Convierte 1250 ml a litros
   Solución: 1,25 l
7. Convierte 78 g a kilogramos
   Solución: 0,078 kg
8. Convierte 2,7 kg a gramos
   Solución: 2700 g
9. Convierte 0,005 km a cm
   Solución: 500 cm
10. Convierte 0,2 hm a metros
    Solución: 20 m
11. Convierte 6,25 dam a decímetros
    Solución: 625 dm
12. Convierte 0,9 dm a milímetros
    Solución: 90 mm
13. ¿Cuántos litros hay en 3,75 hl?
    Solución: 375 l
14. Convierte 5600 ml a litros y decilitros
    Solución: 5 l y 6 dl
15. Convierte 0,325 kg a g y dg
    Solución: 325 g y 0 dg
16. Suma 2,3 l + 450 ml
    Solución: 2,75 l
17. Resta 1,5 kg - 800 g
    Solución: 0,7 kg

18. Suma 750 m + 2,5 km
    Solución: 3250 m

19. Multiplica 2,5 m por 3
    Solución: 7,5 m

20. Divide 3,6 kg entre 4
    Solución: 0,9 kg

21. ¿Cuántos metros hay en 5 dam?
    Solución: 50 m

22. Convierte 0,125 hl a cl
    Solución: 1250 cl

23. ¿Cuántos mm hay en 1,2 m?
    Solución: 1200 mm

24. Suma 3 kg + 4500 g
    Solución: 7,5 kg

25. Resta 5 l - 850 ml
    Solución: 4,15 l

26. Convierte 0,04 km a mm
    Solución: 40000 mm

27. Convierte 9500 mm a metros
    Solución: 9,5 m

28. Convierte 7,5 hl a litros
    Solución: 750 l

29. Convierte 2,35 m a cm
    Solución: 235 cm

30. Convierte 4560 g a kg
    Solución: 4,56 kg

31. Suma 1,25 l + 375 ml
    Solución: 1,625 l

32. ¿Cuántos cm hay en 2,35 dam?
    Solución: 2350 cm

33. Resta 2,7 kg - 1750 g
    Solución: 0,95 kg

34. Convierte 0,007 km a m
    Solución: 7 m

35. Convierte 8,2 dl a litros
    Solución: 0,82 l

36. Convierte 1,5 m^3 a litros
    Solución: 1500 l

37. Convierte 275 cl a litros
    Solución: 2,75 l

38. Convierte 8900 ml a l y dl
    Solución: 8 l y 9 dl

39. Multiplica 1,25 kg por 4
    Solución: 5 kg

40. Divide 6,4 l entre 2
    Solución: 3,2 l

41. Convierte 0,005 kg a mg
    Solución: 5000 mg

42. Convierte 1800 mm a dam
    Solución: 0,18 dam

43. Convierte 2,45 kl a litros
    Solución: 2450 l

44. Suma 0,45 kg + 250 g
    Solución: 0,7 kg

45. Resta 3 m - 250 cm
    Solución: 0,5 m

46. Convierte 3,5 hl a dal
    Solución: 35 dal

47. Convierte 0,85 dam a cm
    Solución: 850 cm

48. Convierte 6,5 kg a hg
    Solución: 65 hg

49. Convierte 0,35 dal a ml
    Solución: 35000 ml

50. Convierte 120 cl a dal
    Solución: 0,12 dal

51. ¿Cuántos litros son 2 m^3?
    Solución: 2000 l

52. Convierte 1000 cm^3 a litros
    Solución: 1 l

53. Convierte 0,003 m^3 a cl
    Solución: 300 cl

54. Convierte 600 dm^3 a m^3
    Solución: 0,6 m^3

55. ¿Cuántos ml hay en 0,25 dm^3?
    Solución: 250 ml

56. Convierte 0,02 hm a mm
    Solución: 2000 mm

57. Convierte 7500 mg a g
    Solución: 7,5 g

58. Convierte 3,2 dag a kg
    Solución: 0,032 kg

59. Convierte 500000 mg a kg
    Solución: 0,5 kg

60. Convierte 1,2 kl a hl
    Solución: 12 hl

61. Convierte 2,3 dal a cl
    Solución: 2300 cl

62. Convierte 0,004 dam^3 a m^3
    Solución: 0,4 m^3

63. Convierte 0,5 cm^3 a ml
    Solución: 0,5 ml

64. Convierte 2,75 dal a l
    Solución: 27,5 l

65. Convierte 0,875 kg a hg
    Solución: 8,75 hg

66. Convierte 0,04 l a ml
    Solución: 40 ml

67. Convierte 2500 ml a dm^3
    Solución: 2,5 dm^3

68. Convierte 0,9 m^3 a dal
    Solución: 90 dal

69. Convierte 120 cl a l
    Solución: 1,2 l

70. Convierte 150 g a dag
    Solución: 15 dag

71. Convierte 2,4 m^3 a kl
    Solución: 2,4 kl

72. Convierte 36 dm^2 a m^2
    Solución: 0,36 m^2

73. Convierte 0,05 m^2 a cm^2
    Solución: 500 cm^2

74. Convierte 450000 mm^2 a m^2
    Solución: 0,45 m^2

75. Convierte 1250 cm^2 a dm^2
    Solución: 12,5 dm^2

76. ¿Cuántos km^2 hay en 12 ha?
    Solución: 0,12 km^2

77. Convierte 2500 m^2 a ares
    Solución: 25 a

78. Convierte 1,5 ha a m^2
    Solución: 15000 m^2

79. Convierte 0,002 km^2 a ha
    Solución: 0,2 ha

80. Convierte 350 a a m^2
    Solución: 35000 m^2

81. Convierte 45 m^2 a cm^2
    Solución: 450000 cm^2

82. Convierte 0,015 dam^2 a m^2
    Solución: 1,5 m^2

83. Convierte 1,2 ha a a
    Solución: 120 a

84. Convierte 0,8 a a m^2
    Solución: 800 m^2

85. Convierte 960000 cm^2 a ha
    Solución: 0,096 ha

86. Convierte 2,5 km^2 a m^2
    Solución: 2500000 m^2

87. Convierte 4,5 ha a dam^2
    Solución: 45 dam^2

88. Convierte 0,0075 km^2 a ha
    Solución: 0,75 ha

89. Convierte 1,6 dam^2 a m^2
    Solución: 160 m^2

90. Convierte 0,03 ha a cm^2
    Solución: 3000000 cm^2

91. Convierte 0,0025 km^2 a a
    Solución: 25 a

92. Convierte 360000 mm^2 a dm^2
    Solución: 36 dm^2

93. Convierte 15 m^2 a dam^2
    Solución: 0,15 dam^2

94. Convierte 0,006 km² a m²
    Solución: 6000 m²

95. Convierte 0,025 ha a dam²
    Solución: 2,5 dam²

96. Convierte 70000 cm² a m²
    Solución: 7 m²

97. Convierte 2,1 dam² a cm²
    Solución: 210000 cm²

98. Convierte 0,45 ha a a
    Solución: 45 a

99. Convierte 3,75 dam² a ha
    Solución: 0,0375 ha

100. Convierte 1800000 cm² a km²
    Solución: 0,00018 km²

QUINTA PARTE: PROPORCIONES Y RAZONES

CAPÍTULO 44: Razón y proporción

La razón es la comparación entre dos cantidades mediante una división. Se expresa comúnmente como fracción, con el símbolo “:” o con el cociente decimal. Por ejemplo, la razón entre 8 y 4 puede escribirse como 8:4, 8/4 o 2. En matemáticas, las razones sirven para comparar magnitudes de la misma naturaleza, como longitud con longitud o tiempo con tiempo.

La proporción es la igualdad entre dos razones. Se expresa como a/b = c/d o a : b :: c : d. En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios, es decir, a × d = b × c. Este principio se conoce como la regla fundamental de las proporciones y es clave en múltiples aplicaciones matemáticas.

Las razones pueden ser directas o inversas. En una relación directa, al aumentar una cantidad, la otra también aumenta proporcionalmente. En una relación inversa, al aumentar una cantidad, la otra disminuye proporcionalmente.

Las razones se utilizan ampliamente en escalas, mapas, recetas, planos, análisis de datos, entre otros contextos donde se comparan cantidades.

CAPÍTULO 45: Repartos proporcionales

El reparto proporcional consiste en dividir una cantidad total entre varias partes de acuerdo con una razón determinada. Se puede realizar un reparto en forma directa o inversa.

En el reparto proporcional directo, las partes se asignan en proporción directa a ciertos valores dados. Por ejemplo, si se quiere repartir 120 euros entre tres personas en proporción 2:3:5, se suman los términos (2+3+5=10) y se divide la cantidad total por esa suma (120/10 = 12). Luego se asigna a cada parte el resultado multiplicado por su correspondiente valor en la razón: 2×12=24, 3×12=36, 5×12=60.

En el reparto proporcional inverso, se reparten las cantidades de forma que quien tenga mayor valor en la razón reciba menos cantidad. Por ejemplo, si tres obreros han trabajado 6, 4 y 2 horas y se desea repartir 96 euros de forma inversamente proporcional, se toma la inversa de las horas (1/6, 1/4, 1/2), se homogeneizan (2:3:6), y se reparte según esa nueva razón.

El reparto proporcional se aplica en herencias, dividendos, trabajo compartido y otros casos donde se distribuyen recursos según criterios específicos.

CAPÍTULO 46: Regla de tres simple

La regla de tres simple es un método para encontrar un cuarto valor conociendo tres valores relacionados entre sí por una proporción. Se clasifica en directa e inversa.

En la regla de tres directa, si al aumentar una cantidad, la otra también aumenta, se aplica la fórmula:

a : b = c : x, despejando x = (b × c) / a

Por ejemplo, si 5 manzanas cuestan 10 euros, ¿cuánto costarán 8 manzanas? Se aplica:

5 : 10 = 8 : x → x = (10 × 8) / 5 = 16

En la regla de tres inversa, si al aumentar una cantidad, la otra disminuye, se aplica:

a : b = x : c, despejando x = (a × c) / b

Por ejemplo, si 3 obreros hacen un trabajo en 6 días, ¿cuántos días tardarán 2 obreros?

3 : 6 = 2 : x → x = (3 × 6) / 2 = 9

La regla de tres simple es útil en situaciones cotidianas como compras, recetas, escalas y tiempos de trabajo.

CAPÍTULO 47: Regla de tres compuesta

La regla de tres compuesta se usa cuando intervienen más de dos magnitudes relacionadas. Se requiere establecer la proporción entre todas las magnitudes conocidas y determinar si son directamente o inversamente proporcionales.

El procedimiento implica organizar los datos en una tabla, indicando la magnitud que se desea encontrar. Se multiplica el producto de las magnitudes directas y se divide entre el producto de las inversas.

Ejemplo: Si 4 obreros construyen un muro en 6 días trabajando 8 horas al día, ¿cuántos días necesitarán 6 obreros trabajando 10 horas al día?

Obreros: 4 → 6 (más obreros, menos días) → inverso
Horas: 8 → 10 (más horas, menos días) → inverso
Días: 6 → x

x = 6 × (4/6) × (8/10) = 6 × (2/3) × (4/5) = 6 × 8/15 = 48/15 = 3,2 días

La regla de tres compuesta se aplica en tareas laborales, producción industrial, velocidad, consumo y otros ámbitos complejos.

CAPÍTULO 48: Porcentaje como proporción

El porcentaje es una forma especial de expresar proporciones, tomando como base el número 100. Se representa con el símbolo %. Por ejemplo, 25% equivale a 25/100 o 0,25.

Para calcular un porcentaje de una cantidad, se multiplica dicha cantidad por el porcentaje expresado como fracción o número decimal. Ejemplo: el 20% de 150 es 150 × 0,20 = 30.

Para encontrar qué porcentaje representa una cantidad respecto a otra, se divide la parte entre el total y se multiplica por 100. Ejemplo: si hay 30 mujeres en un grupo de 80 personas, el porcentaje es (30/80) × 100 = 37,5%.

El porcentaje puede usarse también para aumentos y descuentos. Si algo cuesta 200 y se le aplica un 10% de descuento, el precio final es 200 – (200 × 0,10) = 180. Para un aumento del 10%, sería 200 + (200 × 0,10) = 220.

El concepto de porcentaje es muy utilizado en economía, finanzas, estadísticas, impuestos y análisis de datos.

CAPÍTULO 49: Aplicaciones prácticas de proporciones

Las proporciones se aplican en muchos contextos reales: conversión de unidades, escalas, aumentos y disminuciones porcentuales, análisis de datos, economía, química, física y geometría.

En los mapas, las escalas indican la proporción entre la distancia del mapa y la real. Por ejemplo, una escala 1:100.000 significa que 1 cm en el mapa equivale a 100.000 cm en la realidad.

En la cocina, las recetas requieren ajustes proporcionales según el número de personas. Si una receta para 4 personas lleva 2 huevos, para 6 personas llevará $(2\times6)/4 = 3$ huevos.

En estadística, las proporciones permiten comparar frecuencias, calcular probabilidades y realizar inferencias. Por ejemplo, si el 60% de una muestra votaría por un candidato, se espera que 6 de cada 10 personas estén a su favor.

En química, las proporciones permiten preparar mezclas con concentraciones específicas. En física, se aplican en fórmulas de velocidad, densidad, fuerza, etc.

Dominar las proporciones permite resolver problemas de la vida diaria con precisión y lógica matemática.

Ejercicios con soluciones – Quinta Parte: Proporciones y Razones

---

1. Divide 72 en la razón 2:3
   Solución: 72 ÷ (2+3) = 14,4; 2×14,4 = 28,8 y 3×14,4 = 43,2
2. ¿Cuál es la razón entre 16 y 4?
   Solución: 16 ÷ 4 = 4
3. Si a:b = 3:4 y b:c = 5:6, halla a:c
   Solución: a:b:c = 15:20:24 ⇒ a:c = 15:24
4. Si 8 personas consumen 24 litros, ¿cuánto consumirán 12 personas?
   Solución: Regla de tres directa → (24×12)/8 = 36 litros
5. Reparte 90 en razón inversa a 2:3
   Solución: Inversas = 1/2 y 1/3 ⇒ razón 3:2 ⇒ total partes 5 ⇒ 90÷5=18 ⇒ 3×18=54, 2×18=36
6. Si 6 obreros hacen un trabajo en 10 días, ¿cuántos días necesitan 4 obreros?
   Solución: Regla de tres inversa → (6×10)/4 = 15 días
7. ¿Qué número falta en 4:6 = 10:x?
   Solución: x = (6×10)/4 = 15
8. ¿Cuál es el 35% de 160?
   Solución: 160 × 0.35 = 56
9. Aumenta 120 en un 15%
   Solución: 120 × 0.15 = 18 ⇒ 120 + 18 = 138
10. Disminuye 200 en un 30%
    Solución: 200 × 0.30 = 60 ⇒ 200 – 60 = 140
11. ¿Qué porcentaje representa 30 de 120?
    Solución: (30/120)×100 = 25%
12. Si 3 kg cuestan 12 euros, ¿cuánto costarán 5 kg?
    Solución: (12×5)/3 = 20 euros
13. ¿Qué número debe multiplicarse por 5 para obtener 45?
    Solución: 45 ÷ 5 = 9
14. La razón entre x e y es 7:2. Si x=21, halla y
    Solución: 21 ÷ 7 = 3 ⇒ 2×3 = 6
15. ¿Cuál es la razón entre 100 y 125?
    Solución: 100 ÷ 125 = 0.8
16. Si 5 alumnos consumen 25 libros, ¿cuántos consumirán 8?
    Solución: (25×8)/5 = 40 libros

17. Divide 84 en razón 3:4
    Solución: $3+4=7 \Rightarrow 84 \div 7=12 \Rightarrow 3 \times 12=36,\ 4 \times 12=48$

18. Un coche recorre 240 km en 4 horas. ¿Cuántos km en 7 h?
    Solución: $(240 \times 7)/4 = 420$ km

19. Si $x:y = 4:5$ y $y = 20$, halla x
    Solución: $x = (4 \times 20)/5 = 16$

20. Si 5 operarios hacen una obra en 20 días, ¿cuántos días tardarán 10?
    Solución: $(5 \times 20)/10 = 10$ días

21. Reparte 180 en proporción inversa a 1:2:3
    Solución: Inversas = 1/1, 1/2, 1/3 $\Rightarrow$ razón 6:3:2 $\Rightarrow 6+3+2=11 \Rightarrow 180/11=16.36 \Rightarrow$ $6 \times 16.36 \approx 98.18,\ 3 \times 16.36 \approx 49.09,\ 2 \times 16.36 \approx 32.72$

22. El 15% de un número es 18. ¿Cuál es el número?
    Solución: $18 \div 0.15 = 120$

23. ¿Qué número aumentado en un 25% da 125?
    Solución: $x + 0.25x = 125 \Rightarrow 1.25x = 125 \Rightarrow x = 100$

24. Un producto baja de 180 a 144. ¿Qué porcentaje bajó?
    Solución: $(180–144)/180 \times 100 = 20\%$

25. Si $a:b = 2:5$ y $b = 15$, halla a
    Solución: $a = (2 \times 15)/5 = 6$

26. Reparte 300 en razón 5:7:8
    Solución: $5+7+8=20 \Rightarrow 300/20=15 \Rightarrow 5 \times 15=75,\ 7 \times 15=105,\ 8 \times 15=120$

27. Si 3 kg cuestan 18 €, ¿cuánto costarán 7 kg?
    Solución: $(18 \times 7)/3 = 42$ €

28. ¿Qué número disminuido en 20% da 160?
    Solución: $0.8x = 160 \Rightarrow x = 200$

29. ¿Qué número aumentado en 10% da 88?
    Solución: $1.10x = 88 \Rightarrow x = 80$

30. ¿Cuánto es el 60% de 250?
    Solución: $250 \times 0.60 = 150$

31. ¿Qué porcentaje representa 45 sobre 90?
    Solución: $(45/90) \times 100 = 50\%$

32. Reparte 150 en proporción inversa a 2:3
    Solución: Inversas = 1/2 y 1/3 $\Rightarrow$ razón 3:2 $\Rightarrow$ total 5 $\Rightarrow 150/5=30 \Rightarrow 3 \times 30=90,\ 2 \times 30=60$

33. Si 6 obreros trabajan 8 horas y hacen un trabajo en 5 días, ¿cuántos días necesitan 4 obreros de 6 horas?
    Solución: $x = 5 \times (6/4) \times (8/6) = 5 \times 1.5 \times 1.33 \approx 10$ días

34. ¿Cuánto es el 12.5% de 96?
    Solución: $96 \times 0.125 = 12$

35.Si x:y = 9:4 y y = 12, halla x
Solución: x = (9×12)/4 = 27

36.¿Qué número representa el 80% de 90?
Solución: 90×0.8 = 72

37.Un número es el 25% de otro. Si el primero es 45, halla el segundo
Solución: 45 ÷ 0.25 = 180

38.Divide 200 en razón 3:5:2
Solución: 3+5+2=10 ⇒ 200/10=20 ⇒ 3×20=60, 5×20=100, 2×20=40

39.¿Qué porcentaje representa 48 sobre 160?
Solución: (48/160)×100 = 30%

40.Si 12 operarios hacen una obra en 10 días, ¿cuántos la harán en 6 días?
Solución: (12×10)/6 = 20

41.¿Cuánto representa el 1% de 4000?
Solución: 4000 × 0.01 = 40

42.Aumenta 220 en un 5%
Solución: 220 + 0.05×220 = 231

43.Disminuye 560 en un 40%
Solución: 560 – 0.40×560 = 336

44.¿Qué número representa el 2.5% de 80?
Solución: 80 × 0.025 = 2

45.¿Qué porcentaje representa 9 sobre 36?
Solución: (9/36)×100 = 25%

46.Si un producto vale 160 después de bajar un 20%, ¿cuánto valía antes?
Solución: 160 ÷ 0.8 = 200

47.¿Qué número aumentado en 12% da 280?
Solución: 280 ÷ 1.12 ≈ 250

48.Si a:b = 5:8 y b = 40, halla a
Solución: (5×40)/8 = 25

49.Reparte 360 en razón inversa a 3:6
Solución: Inversas 1/3:1/6 = 2:1 ⇒ total 3 ⇒ 360/3=120 ⇒ 2×120=240, 1×120=120

50.¿Qué porcentaje es 18 de 72?
Solución: (18/72)×100 = 25%

51.Si 9 libros cuestan 54 €, ¿cuánto cuestan 15 libros?
Solución: (54×15)/9 = 90 €

52.¿Qué número representa el 10% de 640?
Solución: 640×0.10 = 64

53.Si a:b = 6:5 y b = 25, halla a
Solución: (6×25)/5 = 30

54.Disminuye 400 en un 5%
Solución: 400 – (0.05×400) = 380

55.Aumenta 500 en un 30%
Solución: 500 + (0.30×500) = 650

56.Si x:y = 3:4 y y = 32, halla x
Solución: (3×32)/4 = 24

57.¿Qué porcentaje representa 72 de 360?
Solución: (72/360)×100 = 20%

58.¿Cuánto es el 15% de 640?
Solución: 640×0.15 = 96

59.Si 5 personas hacen un trabajo en 8 días, ¿cuántas personas lo hacen en 5 días?
Solución: (5×8)/5 = 8 personas

60.Reparte 600 en razón 1:2:3
Solución: 1+2+3=6 ⇒ 600/6=100 ⇒ 1×100=100, 2×100=200, 3×100=300

61.Si a:b = 7:3 y b = 18, halla a
Solución: (7×18)/3 = 42

62.Si 3 alumnos reparten 96 € en razón 2:3:4, ¿cuánto recibe el mayor?
Solución: 2+3+4=9 ⇒ 96/9=10.67 ⇒ 4×10.67 = 42.67 €

63.¿Qué porcentaje representa 144 de 800?
Solución: (144/800)×100 = 18%

64.¿Qué número representa el 60% de 125?
Solución: 125×0.60 = 75

65.¿Qué número aumentado en un 80% da 900?
Solución: 900 ÷ 1.80 = 500

66.Si x:y = 2:5 y x = 14, halla y
Solución: (5×14)/2 = 35

67.Si 20 m cuestan 36 €, ¿cuánto cuestan 35 m?
Solución: (36×35)/20 = 63 €

68.¿Qué número representa el 90% de 1000?
Solución: 1000×0.90 = 900

69.Si 7 personas tardan 12 días, ¿cuántos días 3 personas?
Solución: (7×12)/3 = 28 días

70.Reparte 240 en razón inversa a 4:6
Solución: Inversas = 1/4 : 1/6 = 3:2 ⇒ 5 partes ⇒ 240/5=48 ⇒ 3×48=144, 2×48=96

71.¿Qué porcentaje representa 250 de 625?
Solución: (250/625)×100 = 40%

72.Aumenta 750 en un 20%
Solución: 750×1.20 = 900

73.Disminuye 300 en un 15%
Solución: 300×0.85 = 255

74.¿Cuánto es el 8% de 500?
Solución: 500×0.08 = 40

75.¿Qué porcentaje representa 180 de 900?
Solución: (180/900)×100 = 20%

76.Si a:b = 11:4 y b = 8, halla a
Solución: (11×8)/4 = 22

77.Si 5 botellas cuestan 18 €, ¿cuánto costarán 12?
Solución: (18×12)/5 = 43.2 €

78.¿Qué número aumentado un 25% da 500?
Solución: 500 ÷ 1.25 = 400

79.¿Qué número disminuido en 40% da 300?
Solución: 300 ÷ 0.60 = 500

80.Reparte 360 en razón 2:3:5
Solución: 2+3+5=10 ⇒ 360/10=36 ⇒ 2×36=72, 3×36=108, 5×36=180

81.Si x:y = 9:2 y y = 10, halla x
Solución: (9×10)/2 = 45

82.¿Qué número representa el 33.33% de 120?
Solución: 120×0.3333 ≈ 40

83.¿Qué porcentaje representa 72 de 90?
Solución: (72/90)×100 = 80%

84.¿Qué número aumentado en 60% da 800?
Solución: 800 ÷ 1.60 = 500

85.Si a:b = 7:9 y b = 36, halla a
Solución: (7×36)/9 = 28

86.¿Cuánto es el 5% de 1600?
Solución: 1600×0.05 = 80

87.Si 10 operarios hacen un trabajo en 4 días, ¿cuántos días 8 operarios?
Solución: (10×4)/8 = 5 días

88.Reparte 180 en razón inversa a 5:10
Solución: Inversas = 1/5:1/10 = 2:1 ⇒ total 3 ⇒ 180/3=60 ⇒ 2×60=120, 1×60=60

89.¿Qué número representa el 16.67% de 300?
Solución: 300×0.1667 ≈ 50

90.¿Qué número disminuido en 25% da 225?
Solución: 225 ÷ 0.75 = 300

91.¿Qué número aumentado en 50% da 720?
Solución: 720 ÷ 1.5 = 480

92.¿Qué porcentaje representa 60 de 96?
Solución: (60/96)×100 = 62.5%

93.Reparte 450 en razón 5:10
Solución: 5+10=15 ⇒ 450/15=30 ⇒ 5×30=150, 10×30=300

94.Si a:b = 4:9 y a = 16, halla b
Solución: (9×16)/4 = 36

95.¿Cuánto es el 75% de 240?
Solución: 240×0.75 = 180

96.Si 6 obreros hacen un trabajo en 9 días, ¿cuántos lo harán en 12 días?
Solución: (6×9)/12 = 4.5 obreros

97.¿Qué porcentaje representa 27 de 45?
Solución: (27/45)×100 = 60%

98.Reparte 600 en razón 2:3:1
Solución: 2+3+1=6 ⇒ 600/6=100 ⇒ 2×100=200, 3×100=300, 1×100=100

99.¿Qué número aumentado en 20% da 144?
Solución: 144 ÷ 1.20 = 120

100.¿Qué número representa el 6.25% de 800?
Solución: 800×0.0625 = 50

SÉPTIMA PARTE: PROBLEMAS Y APLICACIONES

Capítulo 57: Problemas verbales con operaciones básicas

Los problemas verbales con operaciones básicas son ejercicios donde se plantean situaciones cotidianas o ficticias que requieren sumar, restar, multiplicar o dividir para encontrar la solución. La clave está en interpretar correctamente el enunciado para saber qué operación aplicar.

Pasos para resolver:

1. Leer con atención el problema completo.
2. Identificar los datos relevantes y lo que se pregunta.
3. Traducir la información a una expresión matemática.
4. Resolver la operación o secuencia de operaciones.
5. Verificar que la respuesta tenga sentido en el contexto.

Ejemplo:

Juan tiene 15 manzanas y compra 8 más. Luego regala 5 a su amigo. ¿Cuántas manzanas le quedan?

- Datos: 15 (inicial), +8 (compra), -5 (regala)
- Operación: 15 + 8 - 5 = 18

- Respuesta: Le quedan 18 manzanas.

Capítulo 58: Problemas con múltiplos y divisores

Estos problemas involucran conceptos de múltiplos, divisores y números primos. Se usan para encontrar cantidades que cumplen ciertas condiciones de divisibilidad.

Conceptos clave:

- Múltiplo: Número que resulta de multiplicar un número entero por otro.
- Divisor: Número que divide exactamente a otro sin dejar residuo.
- Número primo: Solo divisible por 1 y por sí mismo.

Estrategias:

- Encontrar el mínimo común múltiplo (mcm) para problemas de sincronización o coincidencia.
- Usar el máximo común divisor (mcd) para repartir o agrupar objetos.

Ejemplo:

Dos luces parpadean cada 6 y 8 segundos respectivamente. Si empiezan juntas, ¿cada cuántos segundos volverán a parpadear juntas?

- Mcm(6,8) = 24
- Respuesta: Cada 24 segundos.

Capítulo 59: Problemas con fracciones y decimales

Aquí se plantean problemas donde las cantidades están expresadas en fracciones o decimales y se realizan operaciones combinadas.

Recomendaciones:

- Convertir fracciones a un denominador común para sumas o restas.
- Multiplicar o dividir fracciones usando las reglas básicas.
- Convertir decimales a fracciones si facilita el cálculo.
- Cuidar la precisión y redondeos en decimales.

Ejemplo:

Ana tiene 3/4 de litro de jugo y bebe 0.25 litros. ¿Cuánto jugo le queda?

- Convertir 0.25 = 1/4
- Restar: 3/4 - 1/4 = 2/4 = 1/2 litro.
- Respuesta: Le queda 1/2 litro.

Capítulo 60: Problemas con porcentajes

Se resuelven problemas que involucran el cálculo de porcentajes, aumentos, descuentos o proporciones relativas.

Fórmulas básicas:

- Porcentaje de una cantidad: (porcentaje/100) × cantidad
- Cantidad total con aumento o descuento: cantidad ± porcentaje × cantidad

Ejemplo:

Un artículo cuesta 200 unidades monetarias y tiene un descuento del 15%. ¿Cuál es el precio final?

- Descuento: 15% de 200 = (15/100) × 200 = 30
- Precio final: 200 - 30 = 170
- Respuesta: 170 unidades monetarias.

Capítulo 61: Problemas de reparto y proporcionalidad

Se plantean problemas donde se reparte una cantidad entre partes en proporción directa o inversa.

Proporcionalidad directa: Aumenta una cantidad y aumenta la otra en la misma proporción.

Proporcionalidad inversa: Aumenta una cantidad y la otra disminuye en proporción.

Ejemplo proporcionalidad directa:

Si 3 trabajadores hacen un trabajo en 6 días, ¿cuántos días tardarán 6 trabajadores?

- La cantidad de trabajadores se duplica, entonces el tiempo se reduce a la mitad.
- Respuesta: 3 días.

Capítulo 62: Problemas con unidades y conversiones

Problemas que requieren convertir unidades antes de operar (longitud, peso, volumen, tiempo).

Pasos:

1. Identificar las unidades dadas.
2. Convertir todas las cantidades a la misma unidad.
3. Resolver la operación.
4. Expresar la respuesta en la unidad solicitada.

Ejemplo:

Convertir 3 km y 500 metros a metros y hallar la suma.

- 3 km = 3000 m
- Suma: 3000 + 500 = 3500 m

Capítulo 63: Problemas con datos de la vida diaria

Se utilizan situaciones reales para aplicar conceptos matemáticos: compras, tiempo, distancia, consumo.

Importancia: Vincular la matemática con la realidad para comprender su utilidad.

Ejemplo:

Si un coche recorre 180 km con 15 litros de gasolina, ¿cuántos km recorre con 1 litro?

- Regla de tres simple: 15 litros → 180 km
- 1 litro → x km
- x = 180 / 15 = 12 km por litro

Capítulo 64: Estrategias para resolver problemas

Es fundamental desarrollar habilidades para entender y resolver problemas, como:

- Leer el problema más de una vez.
- Subrayar datos importantes.
- Plantear preguntas claras.
- Dividir problemas complejos en partes pequeñas.
- Usar dibujos o esquemas.
- Verificar resultados y sentido de la respuesta.

Ejercicios con soluciones – Septima Parte: Fracciones y Decimales

---

Capítulo 57: Problemas verbales con operaciones básicas (15 ejercicios)

1. Pedro tiene 12 lápices, compra 7 más y regala 5. ¿Cuántos lápices tiene ahora?
   Solución: 12 + 7 - 5 = 14 lápices.
2. En una granja hay 25 ovejas. Se venden 8 y luego nacen 10 corderos. ¿Cuántas ovejas hay ahora?
   Solución: 25 - 8 + 10 = 27 ovejas.
3. Marta tiene 50 euros, gasta 18 en libros y recibe 20 de regalo. ¿Cuánto dinero tiene?
   Solución: 50 - 18 + 20 = 52 euros.
4. Una caja tiene 60 caramelos. Se reparten en partes iguales entre 5 niños. ¿Cuántos recibe cada uno?
   Solución: 60 ÷ 5 = 12 caramelos.

5. Un coche recorre 150 km en 3 horas. ¿Cuántos km recorre por hora?
   Solución: 150 ÷ 3 = 50 km/h.
6. Laura tiene 20 manzanas y 30 naranjas. Regala 5 manzanas y 10 naranjas. ¿Cuántas frutas le quedan?
   Solución: (20 - 5) + (30 - 10) = 15 + 20 = 35 frutas.
7. Un tren sale a las 9:00 y llega a las 12:30. ¿Cuánto tiempo ha durado el viaje?
   Solución: 3 horas y 30 minutos.
8. En una bolsa hay 24 pelotas. Se pierden 7 y se encuentran 3 más. ¿Cuántas pelotas hay?
   Solución: 24 - 7 + 3 = 20 pelotas.
9. Un libro tiene 250 páginas. Si lees 30 páginas por día, ¿cuántos días necesitas para terminarlo?
   Solución: 250 ÷ 30 ≈ 8.33 → 9 días.
10. Juan tiene 3 cajas con 15 chocolates cada una. Come 10 chocolates. ¿Cuántos le quedan?
    Solución: (3 × 15) - 10 = 45 - 10 = 35 chocolates.
11. Una fábrica produce 120 productos al día. ¿Cuántos produce en 10 días?
    Solución: 120 × 10 = 1200 productos.
12. Ana tenía 80 euros, pierde 25 y gana 40. ¿Cuánto dinero tiene?
    Solución: 80 - 25 + 40 = 95 euros.
13. Hay 200 asientos en un teatro. Se ocupan 145. ¿Cuántos quedan libres?
    Solución: 200 - 145 = 55 asientos.
14. Si 4 cajas pesan 20 kg cada una, ¿cuál es el peso total?
    Solución: 4 × 20 = 80 kg.
15. Pedro reparte 48 caramelos entre 8 amigos por igual. ¿Cuántos recibe cada uno?
    Solución: 48 ÷ 8 = 6 caramelos.

Capítulo 58: Problemas con múltiplos y divisores (10 ejercicios)

16. Encuentra el mínimo común múltiplo (mcm) de 4 y 6.
    Solución: mcm(4,6) = 12.
17. ¿Cuál es el máximo común divisor (mcd) de 18 y 24?
    Solución: mcd(18,24) = 6.
18. Dos luces parpadean cada 5 y 7 segundos respectivamente. ¿Cada cuánto parpadean juntas?
    Solución: mcm(5,7) = 35 segundos.
19. Reparte 36 caramelos en bolsas de 4 caramelos. ¿Cuántas bolsas se forman?
    Solución: 36 ÷ 4 = 9 bolsas.
20. Encuentra el mcd de 45 y 60.
    Solución: mcd(45,60) = 15.
21. Dos trenes pasan por una estación cada 12 y 18 minutos. ¿Cada cuánto pasan juntos?
    Solución: mcm(12,18) = 36 minutos.

22.¿Cuál es el mcm de 8 y 14?
Solución: mcm(8,14) = 56.

23.Si 24 es múltiplo de 6 y 8, ¿es 24 múltiplo de 3?
Solución: Sí, porque 24 ÷ 3 = 8 exacto.

24.Encuentra el mcd de 81 y 54.
Solución: mcd(81,54) = 27.

25.Se tienen 30 lápices y se agrupan en paquetes iguales. ¿Cuántos paquetes de 5 lápices se pueden formar?
Solución: 30 ÷ 5 = 6 paquetes.

Capítulo 59: Problemas con fracciones y decimales (15 ejercicios)

26.Suma 2/3 + 1/4.
Solución: 2/3 + 1/4 = 8/12 + 3/12 = 11/12.

27.Resta 5/6 - 1/2.
Solución: 5/6 - 1/2 = 5/6 - 3/6 = 2/6 = 1/3.

28.Multiplica 3/4 × 2/5.
Solución: (3×2)/(4×5) = 6/20 = 3/10.

29.Divide 7/8 ÷ 1/2.
Solución: 7/8 × 2/1 = 14/8 = 7/4 = 1 3/4.

30.Suma 0.75 + 0.2.
Solución: 0.75 + 0.2 = 0.95.

31.Resta 1.5 - 0.85.
Solución: 1.5 - 0.85 = 0.65.

32.Multiplica 0.6 × 0.4.
Solución: 0.6 × 0.4 = 0.24.

33.Divide 0.9 ÷ 0.3.
Solución: 0.9 ÷ 0.3 = 3.

34.Un pastel se divide en 8 partes iguales. Si se comen 3/8, ¿qué fracción queda?
Solución: 1 - 3/8 = 5/8.

35.Convierte 0.125 a fracción.
Solución: 0.125 = 1/8.

36.Suma 1/2 + 0.3.
Solución: 1/2 = 0.5, 0.5 + 0.3 = 0.8.

37.Resta 3/5 - 0.4.
Solución: 3/5 = 0.6, 0.6 - 0.4 = 0.2.

38.Multiplica 2/3 × 0.5.
Solución: 2/3 × 1/2 = 2/6 = 1/3.

39. Divide 5/6 ÷ 0.5.
    Solución: 5/6 ÷ 1/2 = 5/6 × 2/1 = 10/6 = 5/3.

40. Si un litro de leche se usa 3/4, ¿cuánto queda?
    Solución: 1 - 3/4 = 1/4 litro.

Capítulo 60: Problemas con porcentajes (15 ejercicios)

41. Calcula el 20% de 150.
    Solución: (20/100) × 150 = 30.

42. Un producto cuesta 80 euros con un descuento del 10%. ¿Cuál es el precio final?
    Solución: 80 - (10/100 × 80) = 80 - 8 = 72 euros.

43. Aumenta 200 en un 15%.
    Solución: 200 + (15/100 × 200) = 200 + 30 = 230.

44. Si 25% de un número es 50, ¿cuál es el número?
    Solución: x × 0.25 = 50 → x = 50 ÷ 0.25 = 200.

45. Un artículo sube de precio de 120 a 138. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?
    Solución: ((138 - 120)/120) × 100 = (18/120) × 100 = 15%.

46. Calcula el 5% de 600.
    Solución: (5/100) × 600 = 30.

47. Un descuento del 12% en un precio de 250. ¿Cuál es el precio con descuento?
    Solución: 250 - (12/100 × 250) = 250 - 30 = 220.

48. Si un valor disminuye de 500 a 450, ¿cuál es el porcentaje de disminución?
    Solución: ((500 - 450)/500) × 100 = (50/500) × 100 = 10%.

49. Calcula el 150% de 40.
    Solución: (150/100) × 40 = 60.

50. Un precio pasa de 90 a 99. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?
    Solución: ((99 - 90)/90) × 100 = 10%.

51. Si un salario aumenta 8%, y era 1000, ¿cuál es el nuevo salario?
    Solución: 1000 + (8/100 × 1000) = 1080.

52. Un precio con descuento del 25% es 75. ¿Cuál era el precio original?
    Solución: 75 = 75% del original → original = 75 ÷ 0.75 = 100.

53. Aumenta 60 en un 40%.
    Solución: 60 + (40/100 × 60) = 60 + 24 = 84.

54. Calcula el 2.5% de 2000.
    Solución: (2.5/100) × 2000 = 50.

55. Un artículo de 500 euros se vende con un descuento del 20%. ¿Cuál es el precio final?
    Solución: 500 - (20/100 × 500) = 500 - 100 = 400.

Capítulo 61: Problemas de reparto y proporcionalidad (15 ejercicios)

56. Si 4 personas comparten 120 euros por igual, ¿cuánto recibe cada una?
    Solución: 120 ÷ 4 = 30 euros.

57. Reparte 180 manzanas entre 9 niños por igual. ¿Cuántas recibe cada niño?
    Solución: 180 ÷ 9 = 20 manzanas.

58. Si 3 obreros tardan 6 días en un trabajo, ¿cuánto tardan 6 obreros?
    Solución: 3 obreros → 6 días, 6 obreros → 6 × (3/6) = 3 días.

59. Una receta para 4 personas lleva 200 g de harina. ¿Cuánta harina para 6 personas?
    Solución: (200/4) × 6 = 300 g.

60. Si 5 kg de pintura cubren 25 m², ¿cuántos kg para 40 m²?
    Solución: (5/25) × 40 = 8 kg.

61. En una clase, 15 estudiantes usan 3 ordenadores. ¿Cuántos ordenadores para 25 estudiantes?
    Solución: Proporción directa: (3/15) × 25 = 5 ordenadores.

62. Si 8 litros de leche cuestan 12 euros, ¿cuánto cuestan 5 litros?
    Solución: (12/8) × 5 = 7.5 euros.

63. Tres personas hacen un trabajo en 12 días. ¿Cuánto tardan 4 personas?
    Solución: 3 × 12 = 36 jornadas-persona, 36 ÷ 4 = 9 días.

64. Se reparten 72 dulces en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4. ¿Cuánto recibe cada uno?
    Solución: Inversamente proporcional → cantidades proporcionales a 1/2, 1/3, 1/4
    Mcm = 12; proporciones: 6, 4, 3; total partes = 6 + 4 + 3 = 13
    Cantidades: (6/13)*72=33.23, (4/13)*72=22.15, (3/13)*72=16.62 (aprox).

65. Un coche recorre 240 km con 20 litros. ¿Cuántos km con 15 litros?
    Solución: (240/20) × 15 = 180 km.

66. Dos cantidades son proporcionales. Si 4 equivale a 10, ¿qué equivale 7?
    Solución: (7 × 10)/4 = 17.5.

67. Un trabajador gana 1200 euros por 40 horas semanales. ¿Cuánto gana por 30 horas?
    Solución: (1200/40) × 30 = 900 euros.

68. Si 3 máquinas hacen 360 piezas en 8 horas, ¿cuántas hacen 5 máquinas en 10 horas?
    Solución: Piezas por hora por máquina = 360/(3×8) = 15
    Total = 15 × 5 × 10 = 750 piezas.

69. Un jardín se riega con 12 litros de agua en 3 horas. ¿Cuántos litros en 5 horas?
    Solución: (12/3) × 5 = 20 litros.

70. Si un coche viaja a 60 km/h, ¿cuánto tarda en recorrer 180 km?
    Solución: 180 ÷ 60 = 3 horas.

Capítulo 62: Problemas con unidades y conversiones (10 ejercicios)

71. Convierte 5 km a metros.
    Solución: 5 × 1000 = 5000 m.

72. Convierte 3000 m a km.
    Solución: 3000 ÷ 1000 = 3 km.

73. Si un objeto pesa 2500 gramos, ¿cuánto pesa en kg?
    Solución: 2500 ÷ 1000 = 2.5 kg.

74. Convierte 4 horas y 30 minutos en minutos.
    Solución: (4 × 60) + 30 = 270 minutos.

75. Convierte 90 minutos a horas y minutos.
    Solución: 1 hora y 30 minutos.

76. Un tanque contiene 2.5 litros. ¿Cuántos mililitros son?
    Solución: 2.5 × 1000 = 2500 ml.

77. Convierte 1500 ml a litros.
    Solución: 1500 ÷ 1000 = 1.5 litros.

78. Si una distancia es 300 cm, ¿cuántos metros son?
    Solución: 300 ÷ 100 = 3 m.

79. Convierte 120 segundos a minutos.
    Solución: 120 ÷ 60 = 2 minutos.

80. Una velocidad es de 90 km/h. ¿Cuántos metros por segundo son?
    Solución: 90 km/h = 90000 m / 3600 s = 25 m/s.

Capítulo 63: Problemas con datos de la vida diaria (10 ejercicios)

81. Un coche consume 8 litros cada 100 km. ¿Cuánto consume en 350 km?
    Solución: (8/100) × 350 = 28 litros.

82. Un litro de leche cuesta 1.2 euros. ¿Cuánto cuestan 3.5 litros?
    Solución: 1.2 × 3.5 = 4.2 euros.

83. Si un paquete pesa 2 kg y hay 5 paquetes, ¿cuál es el peso total?
    Solución: 2 × 5 = 10 kg.

84. Un trabajador gana 15 euros por hora. ¿Cuánto gana en 40 horas?
    Solución:

OCTAVA PARTE: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA ARITMÉTICA

Capítulo 65: Uso de letras en lugar de números

En aritmética, trabajamos con números específicos para realizar operaciones y resolver problemas. Sin embargo, en álgebra aritmética, se introducen las letras para representar números que no conocemos o que pueden variar. Estas letras se llaman variables o incógnitas. Por ejemplo, en la expresión 3 + x, la letra x representa un número desconocido.

El uso de letras permite generalizar las operaciones aritméticas y establecer reglas que son válidas para muchos casos. Por ejemplo, si decimos que x representa cualquier número, la expresión 2x significa “dos veces ese número”.

Las letras pueden representar tanto números conocidos como desconocidos, o cantidades que pueden cambiar según el contexto. Esto nos facilita trabajar con fórmulas y ecuaciones, pues en vez de números concretos manejamos símbolos que representan cantidades variables.

Es importante distinguir las letras usadas para variables de los números, y entender que podemos operar con ellas según las reglas del álgebra, que extienden las reglas de la aritmética.

Capítulo 66: Expresiones numéricas con incógnitas

Una expresión numérica con incógnitas es una combinación de números, letras (incógnitas), y signos de operación (como suma, resta, multiplicación y división). Por ejemplo, 5x + 3 o 2a - 4b + 7.

Para entender y operar con estas expresiones, debemos aplicar las propiedades aritméticas y las reglas del álgebra:

- Las letras representan valores desconocidos.
- Las operaciones se realizan respetando el orden habitual: multiplicación y división primero, luego suma y resta.
- Cuando una letra aparece sola, significa que su coeficiente es 1, es decir, x equivale a 1·x.
- Cuando hay coeficientes, multiplicamos el número por la letra: 3x significa 3 por x.
- Las letras iguales se pueden sumar o restar, pero letras diferentes se mantienen separadas, ya que representan cantidades diferentes.

Por ejemplo, en la expresión 4x + 5 + 3x, podemos combinar términos semejantes: 4x + 3x = 7x, y la expresión queda 7x + 5.

Si tenemos una expresión como 2a + 3b, no podemos simplificar más porque a y b son incógnitas distintas.

Las expresiones con incógnitas se utilizan para plantear problemas y para formar ecuaciones.

Capítulo 67: Igualdades y desigualdades

Una igualdad es una afirmación de que dos expresiones son iguales. Se representa con el signo =. Por ejemplo, 3x + 2 = 11 significa que la expresión 3x + 2 tiene el mismo valor que 11.

Las desigualdades expresan que una expresión es mayor, menor o igual que otra. Los símbolos usados son:

- para “mayor que”
- < para “menor que”
- ≥ para “mayor o igual que”
- ≤ para “menor o igual que”

Por ejemplo: 2x + 3 > 7 significa que la expresión 2x + 3 es mayor que 7.

En álgebra, es fundamental manejar igualdades y desigualdades para poder resolver problemas y establecer relaciones entre cantidades desconocidas.

Para manipular igualdades y desigualdades, podemos aplicar operaciones a ambos lados respetando las reglas algebraicas, como sumar, restar, multiplicar o dividir por un mismo número, cuidando especialmente cuando multiplicamos o dividimos por números negativos, ya que esto invierte la desigualdad.

Capítulo 68: Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita es una igualdad que contiene una sola variable elevada a la potencia uno (sin exponentes mayores). Por ejemplo: 2x + 5 = 13.

Resolver una ecuación consiste en encontrar el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad.

Para resolverla, seguimos estos pasos:

1. Simplificar ambos lados de la ecuación si es necesario.
2. Agrupar los términos con la incógnita en un lado y los números en el otro.
3. Realizar las operaciones para despejar la incógnita.

Ejemplo:

Resolver 2x + 5 = 13.

- Restamos 5 en ambos lados: 2x + 5 - 5 = 13 - 5 → 2x = 8.
- Dividimos entre 2: 2x / 2 = 8 / 2 → x = 4.

El valor de x es 4, que al sustituirlo en la ecuación inicial la convierte en verdadera.

Las ecuaciones de primer grado pueden tener aplicaciones prácticas en problemas cotidianos, desde repartir cantidades hasta calcular precios o distancias.

Capítulo 69: Aplicación de ecuaciones en problemas aritméticos

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita se utilizan para resolver problemas aritméticos donde hay cantidades desconocidas que queremos calcular.

El procedimiento para aplicar ecuaciones en problemas es:

1. Leer el problema con atención para identificar los datos conocidos y la incógnita.

2. Definir una letra para representar la incógnita.
3. Traducir las condiciones del problema en una ecuación algebraica.
4. Resolver la ecuación para encontrar el valor de la incógnita.
5. Interpretar la solución en el contexto del problema y verificar si tiene sentido.

Ejemplo:

“Un número aumentado en 7 es igual a 15. ¿Cuál es el número?”

Definimos x como el número.

La frase se traduce a la ecuación: $x + 7 = 15$.

Restamos 7 en ambos lados: $x = 15 - 7 \rightarrow x = 8$.

El número buscado es 8.

Este método permite transformar problemas de texto en cálculos algebraicos que facilitan la resolución, incluso cuando los problemas son complejos o involucran varias condiciones.

Ejercicios con soluciones – Octava Parte: Intruducción a la Algebra Aritmética

---

1. Expresa con una letra: "El número 5 aumentado en un número desconocido x."
   Solución: 5 + x
2. Simplifica: 3x + 5x
   Solución: 8x
3. ¿Cuál es el coeficiente en 7y?
   Solución: 7
4. Calcula el valor de 4a si a = 3
   Solución: 4*3 = 12
5. Suma 2x + 3 + 5x
   Solución: 7x + 3
6. Simplifica: 6m - 2m + 4
   Solución: 4m + 4
7. Si x = 2, calcula 3x + 7
   Solución: 3*2 + 7 = 13
8. Resuelve la ecuación: x + 5 = 12
   Solución: x = 7
9. Resuelve: 2x - 3 = 9
   Solución: 2x = 12 → x = 6
10. Si 3a + 4 = 19, halla a
    Solución: 3a = 15 → a = 5
11. Escribe la expresión con letras: "El doble de un número menos 6."
    Solución: 2x - 6
12. Simplifica: 5x + 4 - 3x + 7
    Solución: 2x + 11
13. Resuelve: 4x + 1 = 13
    Solución: 4x = 12 → x = 3
14. Si 7y = 35, ¿cuánto vale y?
    Solución: y = 5
15. Simplifica: 8a - 3a + 2a
    Solución: 7a
16. Evalúa: 6b + 2 si b = 4
    Solución: 6*4 + 2 = 26
17. Resuelve: 5x - 10 = 0
    Solución: 5x = 10 → x = 2

18.Expresa con una ecuación: "Un número aumentado en 8 es igual a 20."
Solución: x + 8 = 20

19.Si x - 3 = 10, halla x
Solución: x = 13

20.Simplifica: 9x + 3 - 2x - 7
Solución: 7x - 4

21.Calcula 3a + 4b si a = 2, b = 3
Solución: 3*2* + *4*3 = 6 + 12 = 18

22.Resuelve: 2x + 3 = 3x - 4
Solución: 2x + 3 = 3x - 4 → -x = -7 → x = 7

23.Expresa "El triple de un número menos 5" con letras
Solución: 3x - 5

24.Si 4x = 28, ¿cuánto vale x?
Solución: x = 7

25.Simplifica: 7y - 2y + 5 - 3
Solución: 5y + 2

26.Evalúa: 5m + 3 si m = 6
Solución: 5*6 + 3 = 33

27.Resuelve: x/2 + 4 = 10
Solución: x/2 = 6 → x = 12

28.Si 3x - 4 = 11, halla x
Solución: 3x = 15 → x = 5

29.Simplifica: 4a + 3b - 2a + b
Solución: 2a + 4b

30.Expresa "La suma de dos números desconocidos a y b."
Solución: a + b

31.Calcula 2x + 3y si x=1, y=4
Solución: 2*1* + *3*4 = 2 + 12 = 14

32.Resuelve: 5x + 2 = 3x + 10
Solución: 2x = 8 → x = 4

33.Simplifica: 9a - 5a + 6
Solución: 4a + 6

34.Evalúa: 7x - 3 si x = 5
Solución: 7*5 - 3 = 35 - 3 = 32

35.Si x + 4 = 9, halla x
Solución: x = 5

36.Expresa con letras: "El doble de un número es igual a 18."
Solución: 2x = 18

37.Resuelve: 3x + 7 = 22
Solución: 3x = 15 → x = 5

38.Simplifica: 8b - 3b + 2b
Solución: 7b

39.Evalúa: 5y + 1 si y = 2
Solución: 5*2 + 1 = 11

40.Resuelve: 6x - 9 = 3
Solución: 6x = 12 → x = 2

41.Escribe la ecuación: "Un número menos 6 es igual a 10."
Solución: x - 6 = 10

42.Calcula 4a + 5b si a=3, b=2
Solución: 4*3* + *5*2 = 12 + 10 = 22

43.Simplifica: 3x + 7 - 5x + 2
Solución: -2x + 9

44.Resuelve: 2x/3 = 8
Solución: 2x = 24 → x = 12

45.Evalúa: 9x - 4 si x = 3
Solución: 9*3 - 4 = 27 - 4 = 23

46.Si 5x + 1 = 16, halla x
Solución: 5x = 15 → x = 3

47.Simplifica: 7a - 2a + 3a
Solución: 8a

48.Expresa: "La suma de un número x y 12."
Solución: x + 12

49.Resuelve: 3x - 5 = 10
Solución: 3x = 15 → x = 5

50.Evalúa: 2x + 9 si x = 4
Solución: 2*4 + 9 = 17

51.Simplifica: 10b - 4b + 2
Solución: 6b + 2

52.Resuelve: x/4 + 3 = 7
Solución: x/4 = 4 → x = 16

53.Si 6x - 3 = 15, halla x
Solución: 6x = 18 → x = 3

54.Expresa "El triple de un número más 5"
Solución: 3x + 5

55.Calcula 5a + 2b si a=2, b=3
Solución: 5*2* + *2*3 = 10 + 6 = 16

56.Simplifica: 4x + 6 - 2x + 1
Solución: 2x + 7

57.Resuelve: 7x - 4 = 24
Solución: 7x = 28 → x = 4

58.Evalúa: 3y + 8 si y = 6
Solución: 3*6 + 8 = 18 + 8 = 26

59.Si x + 7 = 15, halla x
Solución: x = 8

60.Expresa con letras: "El doble de un número aumentado en 3."
Solución: 2x + 3

61.Resuelve: 5x + 4 = 29
Solución: 5x = 25 → x = 5

62.Simplifica: 9a - 4a + 7
Solución: 5a + 7

63.Evalúa: 6x - 5 si x = 7
Solución: 6*7 - 5 = 42 - 5 = 37

64.Resuelve: 2x + 3 = 3x - 2
Solución: 2x + 3 = 3x - 2 → -x = -5 → x = 5

65.Escribe la ecuación: "Un número dividido por 3 es igual a 7."
Solución: x/3 = 7

66.Calcula 3a + 4b si a=1, b=5
Solución: 3*1* + *4*5 = 3 + 20 = 23

67.Simplifica: 8x - 3x + 5
Solución: 5x + 5

68.Resuelve: 4x - 7 = 9
Solución: 4x = 16 → x = 4

69.Evalúa: 7y + 2 si y = 3
Solución: 7*3 + 2 = 23

70.Si x - 4 = 11, halla x
Solución: x = 15

71.Expresa: "El triple de un número menos 4."
Solución: 3x - 4

72.Resuelve: 6x + 5 = 23
Solución: 6x = 18 → x = 3

73.Simplifica: 5a + 7a - 6
Solución: 12a - 6

74.Evalúa: 2x + 9 si x = 8
Solución: 2*8 + 9 = 25

75.Resuelve: 3x/2 = 9
Solución: 3x = 18 → x = 6

76.Expresa la ecuación: "Un número aumentado en 10 es igual a 25."
Solución: x + 10 = 25

77.Calcula 4a + 3b si a=3, b=4
Solución: 4*3* + *3*4 = 12 + 12 = 24

78.Simplifica: 7x + 2 - 5x + 9
Solución: 2x + 11

79.Resuelve: 5x - 8 = 12
Solución: 5x = 20 → x = 4

80.Evalúa: 6y + 1 si y = 5
Solución: 6*5 + 1 = 31

81.Si x + 9 = 20, halla x
Solución: x = 11

82.Expresa: "El doble de un número menos 7."
Solución: 2x - 7

83.Resuelve: 4x + 3 = 19
Solución: 4x = 16 → x = 4

84.Simplifica: 3a + 8a - 5
Solución: 11a - 5

85.Evalúa: 5x - 2 si x = 9
Solución: 5*9 - 2 = 43

86.Resuelve: 2x + 6 = 14
Solución: 2x = 8 → x = 4

87.Expresa la ecuación: "Un número dividido por 5 es igual a 6."
Solución: x/5 = 6

88.Calcula 3a + 2b si a=4, b=1
Solución: 3*4* + *2*1 = 12 + 2 = 14

89.Simplifica: 6x - 2x + 7
Solución: 4x + 7

90.Resuelve: 7x - 3 = 25
Solución: 7x = 28 → x = 4

91.Evalúa: 4y + 5 si y = 7
Solución: 4*7 + 5 = 33

92.Si x - 8 = 12, halla x
Solución: x = 20

93.Expresa: "El triple de un número más 6."
Solución: 3x + 6

94. Resuelve: 5x + 7 = 27
    Solución: 5x = 20 → x = 4

95. Simplifica: 8a - 5a + 3
    Solución: 3a + 3

96. Evalúa: 2x + 11 si x = 5
    Solución: 2*5 + 11 = 21

97. Resuelve: 3x - 4 = 14
    Solución: 3x = 18 → x = 6

98. Expresa la ecuación: "Un número aumentado en 15 es igual a 30."
    Solución: x + 15 = 30

99. Calcula 4a + 6b si a=2, b=5
    Solución: 4*2* + *6*5 = 8 + 30 = 38

100. Simplifica: 7x + 3 - 4x + 9
    Solución: 3x + 12

Polinomios

MÓDULO 1: INTRODUCCIÓN A LOS POLINOMIOS

1. ¿Qué es un polinomio?

Un polinomio es una expresión algebraica formada por la suma o resta de varios términos llamados monomios. Cada monomio está compuesto por un número llamado coeficiente, una o varias variables, y exponentes enteros no negativos. Los polinomios son herramientas fundamentales en álgebra y se utilizan para representar relaciones matemáticas y resolver problemas.

Ejemplo:
$3x^2 + 5x - 7$ es un polinomio de tres términos.

2. Términos algebraicos: coeficiente, variable, exponente

Un término algebraico es una expresión que combina un número con una o más variables elevadas a potencias.
El coeficiente es el número que multiplica a la variable.
La variable representa una cantidad desconocida.
El exponente indica cuántas veces se multiplica la variable por sí misma.

Ejemplo:
En el término $4x^3$:
4 es el coeficiente
x es la variable
3 es el exponente

3. Término independiente

Es el término del polinomio que no contiene ninguna variable, es decir, solo está formado por un número.
Este término representa un valor constante.

Ejemplo:
En el polinomio $2x^2 + 3x - 5$, el término independiente es -5.

4. Clasificación de los polinomios

Según el número de términos:
Monomio: un solo término. Ejemplo: $6x$
Binomio: dos términos. Ejemplo: $x^2 + 2$
Trinomio: tres términos. Ejemplo: $x^2 + 3x + 1$
Polinomio: cuatro o más términos. Ejemplo: $x^3 + 2x^2 + x + 4$

Según el grado:
El grado de un polinomio es el mayor exponente de la variable en los términos.
Polinomio de grado 0: constante
Polinomio de grado 1: lineal
Polinomio de grado 2: cuadrático
Polinomio de grado 3: cúbico
Y así sucesivamente.

5. Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el mayor exponente de las variables que aparece en los términos.
Si hay varias variables, se suman los exponentes de cada término y se toma el mayor.

Ejemplo:
En el polinomio $5x^3 + 2x^2 + x$, el grado es 3.
En el polinomio $3x^2y + 2xy^2 + 5$, el término $3x^2y$ tiene exponente total $2 + 1 = 3$, que es el mayor.

6. Valor numérico de un polinomio

Es el resultado que se obtiene al sustituir la variable por un número dado y realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo:
Si $P(x) = 2x^2 + 3x - 4$, y $x = 2$, entonces
$P(2) = 2(2)^2 + 3(2) - 4 = 2(4) + 6 - 4 = 8 + 6 - 4 = 10$

7. Evaluación de polinomios

Evaluar un polinomio consiste en calcular su valor numérico para un valor específico de la variable.
Se siguen los pasos:

- Sustituir la variable por el valor dado
- Aplicar las operaciones de potencia y multiplicación
- Sumar o restar los términos resultantes

Ejemplo:
Sea $Q(x) = x^3 - 2x + 1$
Si $x = -1$, entonces
$Q(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$

8. Notación algebraica y lenguaje simbólico

La notación algebraica es una forma simbólica de representar cantidades desconocidas y relaciones matemáticas.
Se utilizan letras para las variables, números para los coeficientes y signos matemáticos para las operaciones.
Permite expresar reglas generales y resolver ecuaciones.

Ejemplo de notación:
$P(x) = 3x^2 + 2x - 1$
Aquí, "P(x)" indica que es un polinomio en función de x.
Se pueden usar otras letras como y, z, a, b según el contexto.

MÓDULO 2: OPERACIONES BÁSICAS CON POLINOMIOS

9. Suma de polinomios

Para sumar polinomios, se agrupan los términos semejantes, es decir, los que tienen la misma variable y el mismo exponente. Luego se suman los coeficientes de esos términos.

Ejemplo:
$(3x^2 + 2x + 5) + (4x^2 - x + 3) = (3x^2 + 4x^2) + (2x - x) + (5 + 3) = 7x^2 + x + 8$

10. Resta de polinomios

Para restar polinomios, se cambia el signo a cada término del segundo polinomio y luego se suman los términos semejantes como en la suma.

Ejemplo:
$(5x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - 4x + 1) = (5x^2 - 2x^2) + (3x + 4x) + (-2 - 1) = 3x^2 + 7x - 3$

11. Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio, aplicando las propiedades de los exponentes y multiplicando los coeficientes.

Ejemplo:
$2x * (3x^2 - x + 4) = 6x^3 - 2x^2 + 8x$

12. Multiplicación de polinomios

Binomio por binomio: se multiplica cada término del primer binomio por cada término del segundo y luego se suman los resultados.

Ejemplo:
$(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

Polinomio por polinomio: se sigue el mismo procedimiento que con binomios, multiplicando cada término del primer polinomio por todos los del segundo y luego se agrupan términos semejantes.

Ejemplo:
$(2x + 1)(x^2 - x + 3) = 2x(x^2 - x + 3) + 1(x^2 - x + 3) = 2x^3 - 2x^2 + 6x + x^2 - x + 3 = 2x^3 - x^2 + 5x + 3$

13. Propiedades de las operaciones con polinomios

Conmutativa de la suma: $A + B = B + A$
Asociativa de la suma: $(A + B) + C = A + (B + C)$
Distributiva: $a(b + c) = ab + ac$
No existe propiedad conmutativa ni asociativa para la resta.
Para la multiplicación, también se cumple la propiedad conmutativa y distributiva.

14. División de polinomios por monomios

Se divide cada término del polinomio entre el monomio, aplicando las reglas de división de monomios. Es importante que el monomio no tenga coeficiente cero.

Ejemplo:
$(6x^3 - 9x^2 + 3x) \div 3x = 2x^2 - 3x + 1$

15. División de polinomios entre polinomios

La división entre polinomios puede realizarse por el método tradicional de división larga o por el método de Ruffini (cuando se divide entre binomios de la forma x - a). El objetivo es hallar el cociente y el residuo, si lo hay.

Ejemplo:
$(2x^3 + 3x^2 - x + 5) \div (x + 1)$
Se aplica la división larga dividiendo término a término y restando sucesivamente hasta que el grado del residuo sea menor que el divisor.

16.Criterios de divisibilidad y términos semejantes

Los términos semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal, es decir, la misma variable elevada al mismo exponente. Solo los términos semejantes se pueden sumar o restar entre sí.

Criterios de divisibilidad:
Un polinomio es divisible por un monomio si cada uno de sus términos es divisible por dicho monomio.
Para saber si un polinomio es divisible por otro, se puede realizar la división y comprobar si el residuo es cero. Si el residuo es cero, el divisor es un factor del dividendo.

MÓDULO 3: IDENTIDADES NOTABLES

17.Cuadrado de un binomio

El cuadrado de un binomio es una identidad que permite simplificar el producto de un binomio consigo mismo.
La fórmula general es:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplos:
$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

18.Producto de binomios conjugados

Los binomios conjugados tienen la misma parte literal pero signos opuestos.
La identidad es:
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplos:
$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$
$(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 1$

19.Cubo de un binomio

El cubo de un binomio es una fórmula para multiplicar un binomio tres veces.
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplos:
$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$(2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

20.Suma y diferencia de cubos

Estas identidades permiten factorizar expresiones cúbicas.
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplos:
$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
$27x^3 - 1 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$

21.Cuadrado de trinomios

Se calcula desarrollando el producto del trinomio por sí mismo. No hay una fórmula directa como en el binomio, pero se aplica la multiplicación término a término.

Ejemplo:
$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

22.Otras identidades algebraicas

Existen otras identidades útiles como:

Suma al cuadrado de dos binomios:
$(a + b)(a + c) = a^2 + a(b + c) + bc$

Diferencia de cuadrados de trinomios:
$(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2 = 4b(a + c)$

Producto de tres binomios iguales:
$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$

23.Aplicación de identidades notables en simplificación

Las identidades notables se utilizan para simplificar expresiones algebraicas complejas, hacer factorizaciones rápidas, resolver ecuaciones, y reducir cálculos en problemas.

Ejemplo de simplificación:
Simplificar $(x + 4)^2 - (x - 4)^2$
Usando identidades:
$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$
$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$
La diferencia es: $(x^2 + 8x + 16) - (x^2 - 8x + 16) = 16x$

Estas identidades permiten ahorrar tiempo y evitar errores en manipulaciones algebraicas.

MÓDULO 4: FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

24.Concepto de factorización

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo como producto de factores más simples, generalmente binomios o monomios. La factorización permite simplificar expresiones, resolver ecuaciones y analizar funciones. Se basa en descomponer el polinomio usando propiedades algebraicas.

Ejemplo:
$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

25.Factor común

Se extrae el mayor factor que se repite en todos los términos del polinomio. Ese factor puede ser un número, una variable o ambos.

Ejemplo:
$6x^3 + 9x^2 = 3x^2(2x + 3)$

26.Factor común por agrupación

Se agrupan los términos del polinomio en pares o conjuntos y se saca factor común en cada uno. Luego se busca un factor común en la nueva expresión.

Ejemplo:
$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$

27.Trinomio cuadrado perfecto

Se identifica cuando el primer y el tercer término son cuadrados perfectos y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas. Se factoriza como el cuadrado de un binomio.

Ejemplo:
$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

28.Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Se busca dos números que multiplicados den c y sumados den b. Se usa para trinomios con coeficiente principal igual a 1.

Ejemplo:
$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

29.Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Cuando el coeficiente principal a es distinto de 1, se multiplica a y c, y se buscan dos números que multiplicados den ese producto y sumados den b. Se reescribe el trinomio con cuatro términos y se usa agrupación.

Ejemplo:
$6x^2 + 11x + 3 = 6x^2 + 9x + 2x + 3 = 3x(2x + 3) + 1(2x + 3) = (3x + 1)(2x + 3)$

30.Diferencia de cuadrados

Se aplica la identidad notable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
Se usa cuando hay dos términos que son cuadrados perfectos separados por un signo negativo.

Ejemplo:
$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

31.Suma y diferencia de cubos

Para la suma: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Para la diferencia: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplos:
$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

32.Polinomios con cuatro o más términos

Se aplica la técnica de agrupación o se combinan varias estrategias anteriores, como factor común, diferencia de cuadrados o trinomios.

Ejemplo:
$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^3 + x^2) - (x + 1) = x^2(x + 1) -1(x + 1) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$

33.Comprobación de la factorización

Para verificar si una factorización es correcta, se multiplica nuevamente los factores y se comprueba si se obtiene el polinomio original.

Ejemplo:
$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$, por tanto, es correcta la factorización de $x^2 + 5x + 6$

34.Resolución de ecuaciones por factorización

Una ecuación se puede resolver factorizando el polinomio y aplicando la ley del producto nulo: si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Ejemplo:
$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow (x + 2)(x + 3) = 0 \rightarrow x + 2 = 0$ o $x + 3 = 0 \rightarrow x = -2$ o $x = -3$

La factorización es una herramienta clave para resolver ecuaciones algebraicas de forma efectiva.

MÓDULO 5: DIVISIÓN DE POLINOMIOS

35.División larga de polinomios

La división larga de polinomios es un procedimiento similar al de la división de números naturales. Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor. El resultado se multiplica por todo el divisor, se resta y se repite el proceso con el nuevo polinomio obtenido. El resultado final es un cociente y posiblemente un residuo.

Ejemplo:
Dividir $2x^3 + 3x^2 - x + 5$ entre $x + 1$
Se busca cuántas veces x cabe en $2x^3$, se obtiene $2x^2$
Se multiplica: $2x^2(x + 1) = 2x^3 + 2x^2$
Se resta: $(2x^3 + 3x^2) - (2x^3 + 2x^2) = x^2$
Se repite el proceso con $x^2 - x + 5$, hasta obtener el cociente completo

36.División sintética (Regla de Ruffini)

La regla de Ruffini es un método abreviado para dividir un polinomio entre un binomio de la forma x - a. Solo se utiliza cuando el divisor tiene grado 1 y coeficiente principal 1. Se escriben los coeficientes del polinomio, se coloca a al lado izquierdo, y se realiza una operación de suma y multiplicación descendente.

Ejemplo:
Dividir $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ entre $x - 1$
Se usa Ruffini con a = 1
Se colocan los coeficientes: 1 | -6 | 11 | -6
Se obtiene el cociente: $x^2 - 5x + 6$
Y el residuo es cero

37.Criterio del residuo

El residuo de una división de un polinomio P(x) entre x - a se obtiene evaluando el polinomio en x = a.
Si el residuo es 0, significa que x - a es un factor de P(x)

Ejemplo:
Si $P(x) = x^2 - 3x + 2$ y se divide entre $x - 1$
$P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$
Entonces, x - 1 es un factor de P(x)

38.Teorema del resto

El teorema del resto afirma que el residuo de la división de un polinomio P(x) entre x - a es igual a P(a).
Este teorema permite calcular el residuo sin hacer la división completa.

Ejemplo:
$P(x) = 2x^3 + x - 5$
Dividir entre $x - 2$
$P(2) = 2(8) + 2 - 5 = 16 + 2 - 5 = 13$
Entonces el residuo es 13

39.Teorema del factor

El teorema del factor establece que x - a es un factor de P(x) si y solo si P(a) = 0.
Es útil para encontrar raíces y para factorizar polinomios.

Ejemplo:
$P(x) = x^2 - 4x + 4$
$P(2) = 4 - 8 + 4 = 0$
Por tanto, x - 2 es un factor de P(x)

40.Uso de la división en problemas algebraicos

La división de polinomios se aplica para simplificar fracciones algebraicas, resolver ecuaciones, analizar el comportamiento de funciones racionales, encontrar asíntotas y descomponer expresiones. También se usa para obtener cocientes y residuos útiles en factorización y comprobación de raíces.

Ejemplo:
Una expresión como $(x^3 + 2x^2 - x - 2) / (x + 1)$ se puede simplificar usando división larga o Ruffini para obtener el cociente y continuar operando en el problema algebraico.

MÓDULO 6: RAÍCES Y CERO DE LOS POLINOMIOS

41.Qué es una raíz de un polinomio

Una raíz de un polinomio es un número que, al ser sustituido en el polinomio, lo hace igual a cero. Es decir, si P(r) = 0, entonces r es una raíz o cero del polinomio P(x). Las raíces también son conocidas como soluciones o ceros del polinomio.

Ejemplo:
Si $P(x) = x^2 - 5x + 6$, entonces P(2) = 0 y P(3) = 0, por lo tanto 2 y 3 son raíces.

42.Relación entre ceros y factores

Si r es una raíz de un polinomio P(x), entonces (x - r) es un factor del polinomio. Esto se conoce como el teorema del factor.
De esta forma, el polinomio puede escribirse como P(x) = (x - r)(otro polinomio).

Ejemplo:
$P(x) = x^2 - 3x + 2$ tiene raíces 1 y 2
Entonces P(x) = (x - 1)(x - 2)

43.Búsqueda de raíces racionales (Regla de Descartes)

La regla de Descartes ayuda a estimar el número de raíces reales positivas y negativas de un polinomio observando los cambios de signo en sus coeficientes.

Número de raíces reales positivas: igual al número de cambios de signo en P(x), o menor en un número par.
Número de raíces reales negativas: igual al número de cambios de signo en P(-x), o menor en un número par.

Ejemplo:
$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
Cambios de signo en P(x): 3
Cambios de signo en P(-x): 1
Posibles raíces reales positivas: 3, 1
Posibles raíces reales negativas: 1

44.Teorema de las raíces racionales

Este teorema establece que si un polinomio con coeficientes enteros tiene raíces racionales, estas se encuentran entre los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente principal. Las raíces racionales posibles son p/q, donde p divide al término independiente y q al coeficiente principal.

Ejemplo:
$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 6$
Término independiente: -6
Coeficiente principal: 2
Posibles raíces racionales: ±1, ±2, ±3, ±6, ±1/2, ±3/2

45.Teorema fundamental del álgebra

Este teorema afirma que todo polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces (contando multiplicidades) en el conjunto de los números complejos. Esto significa que todo polinomio puede factorizarse completamente sobre los complejos.

Ejemplo:
Un polinomio de grado 3 tiene 3 raíces complejas, aunque algunas pueden ser reales.

46.Multiplicidad de raíces

Una raíz tiene multiplicidad k si el factor (x - r) aparece k veces en la factorización del polinomio.
Si la multiplicidad es 1, la raíz es simple.
Si es mayor que 1, la raíz es múltiple.

Ejemplo:
$P(x) = (x - 2)^2(x + 1)$
La raíz 2 tiene multiplicidad 2
La raíz -1 tiene multiplicidad 1

47.Polinomios con coeficientes reales y complejos

Si un polinomio tiene coeficientes reales, sus raíces complejas deben aparecer en pares conjugados.
Si a + bi es raíz, entonces a - bi también lo es.
Esto garantiza que el producto de esos factores sea un polinomio con coeficientes reales.

Ejemplo:
$P(x) = x^2 + 4$
Raíces: 2i y -2i
Producto: $(x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$, polinomio con coeficientes reales

Cuando los coeficientes son complejos, las raíces no necesitan aparecer en pares conjugados.

MÓDULO 7: POLINOMIOS Y FUNCIONES

48.Representación gráfica de polinomios

Los polinomios pueden representarse como funciones gráficas en un plano cartesiano. La gráfica de una función polinómica es una curva continua y suave, sin saltos ni asimetrías. Su forma depende del grado del polinomio y del signo del coeficiente principal. Los puntos donde la gráfica corta el eje x son las raíces o ceros, y el punto donde corta el eje y es el valor del término independiente.

Ejemplo:
$P(x) = x^2 - 4x + 3$ tiene raíces en $x = 1$ y $x = 3$
La gráfica es una parábola con vértice en $x = 2$ y concavidad hacia arriba

49.Comportamiento extremo y crecimiento

El comportamiento extremo de una función polinómica describe cómo se comporta la función cuando x tiende a más o menos infinito. Este comportamiento está determinado por el término de mayor grado.
Si el grado es par y el coeficiente principal es positivo, la función crece hacia $+\infty$ en ambos extremos.
Si el grado es impar y el coeficiente principal es positivo, la función baja hacia $-\infty$ a la izquierda y sube hacia $+\infty$ a la derecha.

Ejemplo:
$P(x) = -x^3 + 2x$ tiene comportamiento extremo descendente hacia la derecha y ascendente hacia la izquierda

50.Intersecciones con los ejes

Intersección con el eje x: se encuentra resolviendo $P(x) = 0$. Las soluciones son las raíces del polinomio.
Intersección con el eje y: se obtiene evaluando $P(0)$, que es el término independiente del polinomio.

Ejemplo:
$P(x) = x^2 - x - 6$
Intersección con eje x: $x = -2$ y $x = 3$
Intersección con eje y: $P(0) = -6$

51.Zonas de positividad y negatividad

Son los intervalos del dominio donde la función toma valores positivos (por encima del eje x) o negativos (por debajo del eje x). Para determinar estas zonas, se identifican las raíces y se evalúan signos en los intervalos que se forman.

Ejemplo:
$P(x) = (x - 1)(x - 4)$
Raíces: $x = 1$ y $x = 4$
Zonas:
$x < 1 \rightarrow P(x) > 0$
$1 < x < 4 \rightarrow P(x) < 0$
$x > 4 \rightarrow P(x) > 0$

52.Análisis del signo de un polinomio

El análisis del signo de un polinomio se basa en encontrar los intervalos del dominio donde el polinomio es positivo o negativo. Se utilizan las raíces para dividir la recta real y se elige un valor de prueba en cada intervalo para determinar el signo.

Ejemplo:
$P(x) = x(x - 2)(x + 3)$
Raíces: $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$
Intervalos: $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$
Evaluar en cada intervalo para determinar el signo

53.Aplicaciones de funciones polinómicas

Las funciones polinómicas se aplican en numerosos contextos del mundo real y otras áreas de las matemáticas. Se utilizan para modelar trayectorias, crecimiento económico, comportamiento físico, problemas de optimización, cálculos de área, entre otros. Su análisis permite predecir comportamientos y resolver problemas complejos de manera algebraica y gráfica.

Ejemplo:
El área de un jardín cuadrado que se amplía en cada lado x metros se puede modelar con $A(x) = (10 + x)^2$
Este polinomio representa cómo varía el área en función del crecimiento del lado.

MÓDULO 8: POLINOMIOS ESPECIALES Y APLICACIONES

54.Polinomios simétricos

Un polinomio es simétrico si sus términos mantienen una relación específica entre sus exponentes. Un polinomio es simétrico respecto a su grado si al invertir el orden de los coeficientes se obtiene el mismo polinomio. Esto ocurre cuando los términos de grado complementario tienen el mismo coeficiente.

Ejemplo:
$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ es simétrico porque los coeficientes son iguales en orden inverso.

55.Polinomios homogéneos

Un polinomio es homogéneo si todos sus términos tienen el mismo grado total. El grado de un término es la suma de los exponentes de todas sus variables. Estos polinomios se utilizan frecuentemente en geometría y análisis vectorial.

Ejemplo:
$P(x, y) = 3x^2y + 2xy^2$ es homogéneo de grado 3 porque ambos términos tienen grado total 3.

56.Polinomios irreducibles

Un polinomio es irreducible si no puede factorizarse en productos de polinomios de menor grado con coeficientes en un conjunto dado (por ejemplo, los números enteros o reales). En el campo de los números reales, algunos polinomios cuadráticos con discriminante negativo son irreducibles.

Ejemplo:
$P(x) = x^2 + 1$ es irreducible en los reales porque no tiene raíces reales.

57.Problemas de la vida real modelados con polinomios

Los polinomios se usan para representar situaciones como el movimiento de objetos, el crecimiento de poblaciones, los ingresos y costos de empresas, y muchos otros fenómenos naturales o sociales. Al establecer una relación entre variables, los polinomios permiten predecir resultados y tomar decisiones.

Ejemplo:
El ingreso total de una empresa puede modelarse con $I(x) = 5x^2 + 200x$, donde x es la cantidad de productos vendidos.

58.Polinomios en física, economía e ingeniería

En física, los polinomios se aplican para describir trayectorias, energía potencial y velocidad.
En economía, se usan en análisis de costos, ingresos, beneficios y maximización.
En ingeniería, aparecen en cálculos estructurales, circuitos eléctricos y diseño de máquinas.

Ejemplos:
Física: la posición $s(t) = -4.9t^2 + vt + s_0$ modela la caída libre
Economía: $C(x) = x^2 + 100x + 500$ representa el costo total en función de unidades producidas

59.Interpolación con polinomios

La interpolación consiste en construir un polinomio que pase exactamente por un conjunto de puntos dados. Se utiliza para estimar valores desconocidos entre datos conocidos. El método de interpolación de Lagrange o el de Newton son los más utilizados.

Ejemplo:
Dados los puntos (1, 2), (2, 3), (3, 5), se puede hallar un polinomio P(x) que pase por ellos.

60.Resolución de problemas por igualación de polinomios

En algunos problemas, dos expresiones polinómicas representan cantidades iguales. Para resolver el problema, se igualan los polinomios y se resuelve la ecuación resultante. Este método permite encontrar valores desconocidos que hacen que dos situaciones se equilibren.

Ejemplo:
Si el ingreso es $I(x) = 100x$ y el costo es $C(x) = 80x + 400$, se igualan para encontrar el punto de equilibrio:
$100x = 80x + 400 \rightarrow 20x = 400 \rightarrow x = 20$
A partir de 20 unidades vendidas, hay ganancias.

MÓDULO 9: POLINOMIOS EN DIFERENTES CAMPOS

61.Polinomios en el cuerpo de los números reales

Los polinomios con coeficientes en el cuerpo de los números reales R son expresiones algebraicas de la forma:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

donde $a_i \in R$ y n es un entero no negativo.

En R, los polinomios tienen propiedades fundamentales:

- Se pueden sumar, restar y multiplicar, manteniéndose dentro de R[x].
- El Teorema Fundamental del Álgebra garantiza que un polinomio no constante tiene al menos una raíz en los complejos, no necesariamente en R.
- Los polinomios reales pueden factorizarse en factores lineales y cuadráticos irreducibles en R.
- La división con resto es posible, dando lugar a cocientes y residuos.

Este estudio es esencial para análisis, cálculo y física, donde las soluciones reales son relevantes.

62.Polinomios en el cuerpo de los números complejos

En C[x], los polinomios con coeficientes complejos tienen la forma:

$P(x) = a_n x^n + ... + a_0$, con $a_i \in C$.

El campo complejo es algebraicamente cerrado, lo que implica:

- Todo polinomio no constante se factoriza completamente en factores lineales.
- El Teorema Fundamental del Álgebra asegura raíces complejas para cualquier polinomio no constante.
- Esto simplifica el análisis y la resolución de ecuaciones polinómicas.
- Los coeficientes complejos permiten resolver ecuaciones que no admiten soluciones reales.
- La multiplicación, suma y división con resto funcionan igual que en R[x].

Este contexto es fundamental en análisis complejo y física cuántica.

63.Polinomios con coeficientes enteros

Los polinomios en Z[x] tienen coeficientes en los enteros Z.

Características importantes:

- No forman un cuerpo, pues Z no es campo (no todos los elementos tienen inverso multiplicativo).
- Se pueden sumar, restar y multiplicar, pero la división con resto no siempre produce polinomios con coeficientes enteros.
- Se estudian divisibilidad, factorización, irreducibilidad (por ejemplo, con criterios como Eisenstein).
- Los polinomios enteros son esenciales en teoría de números y criptografía.
- El Teorema de Gauss ayuda a relacionar factorización en Z[x] con la de Q[x].

Este campo es más restrictivo pero clave para estructuras algebraicas discretas.

64. Polinomios sobre cuerpos finitos

Un cuerpo finito es un conjunto finito con operaciones de suma y producto que cumplen axiomas de campo.

Ejemplo: cuerpo de restos módulo un primo p, denotado F_p.

Los polinomios en F_p[x]:

- Tienen coeficientes en F_p, que es finito.
- Se usan en teoría de códigos, criptografía y combinatoria.
- La factorización difiere respecto a campos infinitos, y puede haber polinomios irreducibles especiales.
- El concepto de raíz cambia: puede haber múltiples raíces en extensiones de cuerpos finitos.
- Existen algoritmos eficientes para factorizar y calcular raíces en estos campos.

Estos polinomios son la base para construcción de cuerpos finitos extensiones y aplicaciones en informática.

65. Introducción a los polinomios en álgebra abstracta

En álgebra abstracta, se estudian polinomios sobre un anillo o cuerpo arbitrario K.

Definiciones básicas:

- El conjunto K[x] es el anillo de polinomios sobre K.
- Cuando K es un cuerpo, K[x] es un dominio de integridad, pero no es cuerpo.
- Se generalizan conceptos de división, factorización e irreducibilidad.
- Se estudian ideales generados por polinomios, mapeos evaluación y raíces.
- Se utilizan para construir extensiones de cuerpos, cuerpos de fracciones y para estudiar estructuras algebraicas complejas.
- La teoría incluye polinomios mínimos, polinomios característicos y su relación con álgebra lineal y teoría de Galois.

Este enfoque abstracto permite generalizar la teoría y aplicar polinomios en diferentes ramas de matemáticas y ciencias.

MÓDULO 10: POLINOMIOS Y DERIVADAS (ENLACE CON EL CÁLCULO)

66. Derivación de polinomios

La derivada de un polinomio $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ se calcula aplicando la regla de potencia término a término:

$P'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + ... + 1 \cdot a_1$.

La derivación reduce el grado del polinomio en uno y proporciona una nueva función que describe la tasa de cambio instantánea.

Es una operación lineal, que respeta suma y multiplicación por constantes.

Ejemplo: si $P(x) = 3x^3 - 5x + 2$, entonces $P'(x) = 9x^2 - 5$.

67. Interpretación geométrica de la derivada

La derivada de una función en un punto representa la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Para polinomios, esto significa que $P'(x_0)$ indica la inclinación de la gráfica de P en $x = x_0$.

Si $P'(x_0) > 0$, la función crece localmente; si es negativa, decrece; si es cero, puede indicar un punto crítico.

Esta interpretación es fundamental para entender comportamiento local de funciones y optimización.

68. Cálculo de máximos y mínimos de funciones polinómicas

Los extremos relativos de un polinomio P(x) se encuentran donde su derivada se anula: $P'(x) = 0$.

Para determinar si un punto crítico es máximo, mínimo o punto de inflexión, se puede usar:

- La segunda derivada: si $P''(x_0) > 0$, mínimo local; si < 0, máximo local; si $= 0$, inconcluso.
- Análisis del cambio de signo de P'(x).

Estos puntos son importantes para optimización y análisis de comportamiento funcional.

69. Tasa de cambio

La derivada P'(x) mide la tasa de cambio instantánea de la función P(x) respecto a la variable x.

Esta tasa indica cuánto cambia la función ante pequeños cambios en x.

Es útil para describir fenómenos físicos, económicos y biológicos donde las cantidades varían continuamente.

En polinomios, la tasa de cambio es siempre un polinomio de grado menor, facilitando cálculos y análisis.

70. Aproximación de funciones con polinomios (Taylor y Maclaurin)

El teorema de Taylor permite aproximar funciones suaves mediante polinomios centrados en un punto a:

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)/2! (x - a)^2 + ... + f^{(n)}(a)/n! (x - a)^n$.

Cuando a = 0, se llama serie de Maclaurin.

Estos polinomios aproximan funciones complicadas con polinomios simples, facilitando cálculos y análisis.

Para funciones polinómicas, la serie de Taylor termina en el grado del polinomio, dando la función exacta.

Esta herramienta es esencial en análisis numérico, física y ingeniería para aproximaciones y modelos.

EJERCICIOS

1. Simplifica: $(3x^2 + 2x - 5) + (4x^2 - 3x + 7)$
   Solución: $7x^2 - x + 2$
2. Simplifica: $(5x^3 - x + 4) - (2x^3 + 3x - 1)$
   Solución: $3x^3 - 4x + 5$
3. Multiplica: $(x + 2)(x - 3)$
   Solución: $x^2 - x - 6$
4. Multiplica: $(2x - 5)(3x + 4)$
   Solución: $6x^2 + 8x - 15x - 20 = 6x^2 - 7x - 20$
5. Divide: $(6x^3 + 5x^2 - 4x + 7) \div (2x - 1)$
   Solución: Cociente: $3x^2 + 4x - 3$, Residuo: 4
6. Factoriza: $x^2 - 9$
   Solución: $(x - 3)(x + 3)$
7. Factoriza: $x^2 + 5x + 6$
   Solución: $(x + 2)(x + 3)$
8. Factoriza: $2x^2 - 8x$
   Solución: $2x(x - 4)$
9. Halla las raíces de $x^2 - 4x + 3 = 0$
   Solución: $x = 1$, $x = 3$
10. Halla las raíces de $3x^2 + 6x + 3 = 0$
    Solución: $x = -1$
11. Deriva: $P(x) = 4x^3 - 2x + 7$
    Solución: $P'(x) = 12x^2 - 2$
12. Calcula $P(2)$ para $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
    Solución: $P(2) = 8 - 12 + 2 = -2$
13. Evalúa $P(-1)$ para $P(x) = 2x^4 - x + 1$
    Solución: $2(1) + 1 + 1 = 4$
14. Suma: $(x^3 + 2x - 1) + (x^3 - 5x + 3)$
    Solución: $2x^3 - 3x + 2$
15. Resta: $(5x^2 + 3x - 4) - (2x^2 + x + 1)$
    Solución: $3x^2 + 2x - 5$
16. Multiplica: $(x - 1)^2$
    Solución: $x^2 - 2x + 1$
17. Expande: $(x + 3)(x^2 - x + 4)$
    Solución: $x^3 - x^2 + 4x + 3x^2 - 3x + 12 = x^3 + 2x^2 + x + 12$
18. Divide: $x^3 - 4x^2 + x - 6$ entre $x - 2$
    Solución: Cociente: $x^2 - 2x - 3$, Residuo: 0

19.Factoriza: $x^3 - 8$
Solución: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

20.Halla los coeficientes del polinomio: $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
Solución: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

21.Deriva: $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + x$
Solución: $20x^3 - 9x^2 + 1$

22.Evalúa $P(0)$ para $P(x) = 7x^5 - 4x + 2$
Solución: 2

23.Suma: $(2x^3 + x - 7) + (-x^3 + 4x + 2)$
Solución: $x^3 + 5x - 5$

24.Resta: $(4x^4 - x^2 + 1) - (x^4 + 2x^2 - 3)$
Solución: $3x^4 - 3x^2 + 4$

25.Multiplica: $(3x - 2)(x^2 + x + 1)$
Solución: $3x^3 + 3x^2 + 3x - 2x^2 - 2x - 2 = 3x^3 + x^2 + x - 2$

26.Divide: $2x^3 + 3x^2 - x + 5$ entre $x + 1$
Solución: Cociente: $2x^2 + x - 2$, Residuo: 7

27.Factoriza: $x^4 - 16$
Solución: $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

28.Factoriza: $x^3 + 27$
Solución: $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

29.Halla las raíces reales de $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$
Solución: $x = 2$, $x = -1$, $x = 3$

30.Deriva: $P(x) = 6x^5 - 10x^3 + x$
Solución: $30x^4 - 30x^2 + 1$

31.Evalúa $P(1)$ para $P(x) = x^4 - x^3 + 2x - 5$
Solución: $1 - 1 + 2 - 5 = -3$

32.Suma: $(x^2 + 3x + 1) + (2x^2 - x + 4)$
Solución: $3x^2 + 2x + 5$

33.Resta: $(5x^3 - 2x + 7) - (3x^3 + x - 4)$
Solución: $2x^3 - 3x + 11$

34.Multiplica: $(x + 4)(x - 5)$
Solución: $x^2 - x - 20$

35.Divide: $x^3 + 2x^2 - x + 1$ entre $x + 1$
Solución: Cociente: $x^2 + x - 2$, Residuo: 3

36.Factoriza: $x^3 - x$
Solución: $x(x - 1)(x + 1)$

37.Halla las raíces de $2x^2 - 7x + 3 = 0$
Solución: $x = 3$, $x = 1/2$

38.Deriva: $P(x) = x^5 - 2x^3 + x$
Solución: $5x^4 - 6x^2 + 1$

39.Evalúa $P(-2)$ para $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 5$
Solución: $-24 + 8 + 2 + 5 = -9$

40.Suma: $(x^4 - x + 3) + (2x^4 + x - 1)$
Solución: $3x^4 + 2$

41.Resta: $(x^3 + 4x - 2) - (x^3 - 2x + 1)$
Solución: $6x - 3$

42.Multiplica: $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
Solución: $x^3 - 27$

43.Divide: $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ entre $2x - 1$
Solución: Cociente: $2x^2 - x + 1$, Residuo: 0

44.Factoriza: $x^4 + 4x^2 + 4$
Solución: $(x^2 + 2)^2$

45.Halla las raíces de $x^2 + 2x + 5 = 0$
Solución: $x = -1 \pm 2i$

46.Deriva: $P(x) = 7x^3 - 4x + 6$
Solución: $21x^2 - 4$

47.Evalúa $P(3)$ para $P(x) = x^2 - 5x + 7$
Solución: $9 - 15 + 7 = 1$

48.Suma: $(3x^2 + x - 4) + (x^2 - 2x + 1)$
Solución: $4x^2 - x - 3$

49.Resta: $(2x^3 + 3x^2 - x) - (x^3 - x^2 + 4)$
Solución: $x^3 + 4x^2 - x - 4$

50.Multiplica: $(2x + 3)(x - 1)$
Solución: $2x^2 - 2x + 3x - 3 = 2x^2 + x - 3$

51.Factoriza: $x^3 - 27$
Solución: $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

52.Halla las raíces de $x^2 - 6x + 9 = 0$
Solución: $x = 3$ (raíz doble)

53.Deriva: $P(x) = 9x^4 - 7x^2 + x$
Solución: $36x^3 - 14x + 1$

54.Evalúa $P(0)$ para $P(x) = 5x^3 - 4x + 9$
Solución: 9

55.Suma: $(x^3 + 2x^2 - x) + (3x^3 - x^2 + 4x)$
Solución: $4x^3 + x^2 + 3x$

56.Resta: $(2x^4 - 3x + 7) - (x^4 + 2x - 5)$
Solución: $x^4 - 5x + 12$

57.Multiplica: $(x - 4)(x + 4)$
  Solución: $x^2 - 16$

58.Divide: $3x^3 - x^2 + 5x - 2$ entre $x - 1$
  Solución: Cociente: $3x^2 + 2x + 7$, Residuo: 5

59.Factoriza: $x^4 - 1$
  Solución: $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

60.Halla las raíces reales de $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$
  Solución: $x = -2$, $x = -1$, $x = 2$

61.Deriva: $P(x) = 4x^5 - 3x^2 + 7$
  Solución: $20x^4 - 6x$

62.Evalúa $P(1)$ para $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 5$
  Solución: $1 + 3 - 2 + 5 = 7$

63.Suma: $(2x^3 - x + 1) + (-x^3 + 4x - 3)$
  Solución: $x^3 + 3x - 2$

64.Resta: $(x^4 + 2x^2 - 5) - (3x^4 - x^2 + 1)$
  Solución: $-2x^4 + 3x^2 - 6$

65.Multiplica: $(x + 5)(x^2 - 2x + 3)$
  Solución: $x^3 + 3x^2 - 7x + 15$

66.Divide: $2x^3 + 7x^2 - x + 4$ entre $x + 3$
  Solución: Cociente: $2x^2 + x - 4$, Residuo: 16

67.Factoriza: $x^3 + 6x^2 + 9x$
  Solución: $x(x + 3)^2$

68.Halla las raíces de $2x^2 - 5x + 2 = 0$
  Solución: $x = 2$, $x = 0.5$

69.Deriva: $P(x) = 7x^4 - 5x + 2$
  Solución: $28x^3 - 5$

70.Evalúa $P(-1)$ para $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 3$
  Solución: $-1 - 4 + 6 - 3 = -2$

71.Suma: $(3x^2 - x + 4) + (x^2 + 2x - 5)$
  Solución: $4x^2 + x - 1$

72.Resta: $(x^3 + 4x - 6) - (2x^3 - x + 3)$
  Solución: $-x^3 + 5x - 9$

73.Multiplica: $(2x - 3)(x^2 + x + 1)$
  Solución: $2x^3 + 2x^2 + 2x - 3x^2 - 3x - 3 = 2x^3 - x^2 - x - 3$

74.Divide: $x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ entre $x - 2$
  Solución: Cociente: $x^2 + 0x + 4$, Residuo: 3

75.Factoriza: $x^4 + 2x^2 + 1$
  Solución: $(x^2 + 1)^2$

76.Halla las raíces de $x^2 - 2x + 10 = 0$
Solución: $x = 1 \pm 3i$

77.Deriva: $P(x) = 5x^3 - 2x + 8$
Solución: $15x^2 - 2$

78.Evalúa P(2) para $P(x) = 4x^4 - x^3 + x - 7$
Solución: $64 - 8 + 2 - 7 = 51$

79.Suma: $(x^3 - 5x + 1) + (2x^3 + 3x - 2)$
Solución: $3x^3 - 2x - 1$

80.Resta: $(3x^2 + x - 4) - (x^2 - 2x + 5)$
Solución: $2x^2 + 3x - 9$

81.Multiplica: $(x - 1)(x^2 + 2x + 3)$
Solución: $x^3 + 2x^2 + 3x - x^2 - 2x - 3 = x^3 + x^2 + x - 3$

82.Divide: $2x^3 + 3x^2 - 7$ entre $x + 2$
Solución: Cociente: $2x^2 - x + 2$, Residuo: -11

83.Factoriza: $x^3 - 1$
Solución: $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

84.Halla las raíces reales de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
Solución: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$

85.Deriva: $P(x) = 6x^4 - 9x^2 + x$
Solución: $24x^3 - 18x + 1$

86.Evalúa P(0) para $P(x) = x^5 - 4x + 1$
Solución: 1

87.Suma: $(x^4 + 3x^3 - x) + (2x^4 - x^3 + 4)$
Solución: $3x^4 + 2x^3 - x + 4$

88.Resta: $(4x^3 - 2x + 7) - (x^3 + 5x - 3)$
Solución: $3x^3 - 7x + 10$

89.Multiplica: $(x + 6)(x - 2)$
Solución: $x^2 + 4x - 12$

90.Divide: $3x^3 - x^2 + 4x - 5$ entre $x - 1$
Solución: Cociente: $3x^2 + 2x + 6$, Residuo: 1

91.Factoriza: $x^4 - 5x^2 + 6$
Solución: $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$

92.Halla las raíces de $4x^2 + 4x + 1 = 0$
Solución: $x = -0.5$ (raíz doble)

93.Deriva: $P(x) = 8x^3 - 6x^2 + 5x - 1$
Solución: $24x^2 - 12x + 5$

94.Evalúa P(1) para $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3$
Solución: $2 - 1 + 3 = 4$

95.Suma: $(x^3 + x - 1) + (2x^3 - 3x + 4)$
  Solución: $3x^3 - 2x + 3$

96.Resta: $(3x^2 + 2x - 5) - (x^2 - x + 1)$
  Solución: $2x^2 + 3x - 6$

97.Multiplica: $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$
  Solución: $x^3 - 125$

98.Divide: $5x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ entre $x + 1$
  Solución: Cociente: $5x^2 - 7x + 11$, Residuo: -18

99.Factoriza: $x^4 + 4x^2 + 4$
  Solución: $(x^2 + 2)^2$

100.Halla las raíces reales de $x^3 - 3x + 2 = 0$
  Solución: $x = 1$, $x = 1$, $x = -2$ (raíz doble en 1)

Matematicas financieras

Unidad 1: Fundamentos de Matemáticas Financieras

1.1 Concepto de valor del dinero en el tiempo
El valor del dinero en el tiempo se refiere a la idea de que una cantidad de dinero hoy vale más que la misma cantidad en el futuro debido a su capacidad de generar intereses. Esta noción se basa en que el dinero puede invertirse para obtener un rendimiento. Por tanto, el tiempo afecta al valor del dinero y debe tenerse en cuenta en toda evaluación financiera.

1.2 Interés simple y compuesto
El **interés simple** se calcula únicamente sobre el capital inicial durante un período determinado.
Fórmula: I = C * i * n
Donde:
I = Interés
C = Capital
i = tasa de interés
n = tiempo

El **interés compuesto** se calcula sobre el capital inicial más los intereses acumulados de periodos anteriores.
Fórmula: M = C * (1 + i)^n
Donde:
M = monto acumulado
C = capital
i = tasa de interés por periodo
n = número de periodos

1.3 Tasas de interés: nominal, efectiva y real

- **Tasa nominal (i_n):** es una tasa anual que no tiene en cuenta la capitalización durante el año.
- **Tasa efectiva (i_e):** es la tasa real que incluye los efectos de la capitalización.
  Fórmula: $i_e = (1 + i/m)^m - 1$
  Donde m es el número de periodos de capitalización al año.
- **Tasa real:** tiene en cuenta la inflación.
  Fórmula aproximada: $i_r \approx i_e$ - inflación

1.4 Capitalización: anticipada y vencida

- **Capitalización anticipada:** los intereses se pagan al inicio del periodo.
- **Capitalización vencida:** los intereses se pagan al final del periodo.
  El tipo de capitalización afecta los cálculos del monto y valor presente.

1.5 Conversión de tasas de interés
La conversión de tasas permite transformar tasas de un periodo a otro.
Fórmula general:
$i_2 = (1 + i_1)^{(n_1/n_2)} - 1$
Donde:
i_1 = tasa original
i_2 = tasa convertida
n_1 y n_2 = número de periodos respectivos

Ejemplo: convertir una tasa anual efectiva a mensual efectiva.

1.6 Ecuación de valor
La ecuación de valor permite igualar el valor presente de pagos futuros en distintos momentos del tiempo, trasladándolos a un mismo punto de referencia.
Fórmula básica:
∑ VP ingresos = ∑ VP egresos
Cada valor presente se calcula utilizando el interés correspondiente al periodo y trasladando todos los flujos de efectivo al mismo momento.

10 ejercicios con solución sobre la Unidad 1: Fundamentos de Matemáticas Financieras

---

Ejercicio 1
Un capital de 1,000 euros se invierte al 5% anual durante 3 años en interés simple. ¿Cuál será el monto final?
Solución:
I = 1000 * 0.05 * 3 = 150
Monto = 1000 + 150 = 1150
Explicación: se aplica la fórmula del interés simple I = C * i * n

---

Ejercicio 2
Un capital de 2,000 euros se invierte al 6% anual compuesto durante 2 años. ¿Cuál es el monto acumulado?
Solución:
Monto = 2000 * (1 + 0.06)^2 = 2000 * 1.1236 ≈ 2247.20
Explicación: se usa la fórmula del interés compuesto M = C * (1 + i)^n

---

Ejercicio 3
Convierte una tasa nominal anual del 12% capitalizable mensualmente a tasa efectiva anual.
Solución:
i_e = (1 + 0.12/12)^12 - 1 = (1 + 0.01)^12 - 1 ≈ 0.1268 o 12.68%
Explicación: se aplica la fórmula de conversión de tasa nominal a efectiva

---

Ejercicio 4
Convierte una tasa efectiva anual del 18% a una tasa efectiva trimestral.
Solución:
i_t = (1 + 0.18)^(1/4) - 1 ≈ 0.0427 o 4.27%
Explicación: se aplica la conversión entre tasas efectivas

Ejercicio 5
¿Qué tasa real se obtiene si la tasa efectiva es del 10% y la inflación del 3%?
Solución:

Tasa real ≈ 10% - 3% = 7%
Explicación: fórmula aproximada de tasa real = i_e - inflación

---

Ejercicio 6
Un préstamo de 5,000 euros debe ser pagado con dos cuotas: 2,000 en 1 año y 3,300 en 2 años. Si la tasa de interés es del 10%, ¿el préstamo está equilibrado?
Solución:
VP1 = 2000 / (1 + 0.10)^1 = 1818.18
VP2 = 3300 / (1 + 0.10)^2 = 2727.27
Total VP = 1818.18 + 2727.27 = 4545.45
El valor presente del préstamo es menor que 5000, no está equilibrado.
Explicación: se traslada el valor de las cuotas al presente con interés compuesto

---

Ejercicio 7
Una inversión de 1,500 euros genera un interés de 270 euros en 3 años. ¿Cuál fue la tasa de interés simple anual?
Solución:
I = 270 = C * i * n = 1500 * i * 3
i = 270 / (1500 * 3) = 0.06 o 6%
Explicación: se despeja la tasa de la fórmula del interés simple

---

Ejercicio 8
Una deuda de 2,000 euros se paga con un pago único dentro de 4 años. ¿Cuál será ese monto si se capitaliza a interés compuesto anual del 8%?
Solución:
Monto = 2000 * (1 + 0.08)^4 = 2000 * 1.3605 ≈ 2721.03
Explicación: interés compuesto con n = 4

Ejercicio 9
¿Cuál es el capital necesario hoy para tener 10,000 euros dentro de 5 años al 7% compuesto anual?
Solución:
C = 10000 / (1 + 0.07)^5 ≈ 10000 / 1.4026 ≈ 7127.02
Explicación: se usa la fórmula del valor presente C = M / (1 + i)^n

---

Ejercicio 10
Una renta de 500 euros al final de cada año durante 3 años se descuenta al 6% anual. ¿Cuál es su valor presente?
Solución:
VP = 500 / (1.06)^1 + 500 / (1.06)^2 + 500 / (1.06)^3
VP ≈ 471.70 + 444.06 + 419.87 ≈ 1335.63
Explicación: se descuenta cada flujo individualmente al presente

---

Unidad 2: Interés Simple

2.1 Definición y fórmula del interés simple
El interés simple es la cantidad que se paga o se gana por el uso del dinero durante un tiempo determinado, calculado únicamente sobre el capital inicial. No se acumulan los intereses generados en cada periodo.
Fórmula general:
I = C * i * t
Donde:
I = interés
C = capital o cantidad inicial
i = tasa de interés por periodo
t = tiempo

Monto total acumulado (M):
M = C + I = C * (1 + i * t)

2.2 Cálculo del capital, tasa, tiempo e interés
A partir de la fórmula I = C * i * t se pueden despejar las otras variables:
Capital: C = I / (i * t)
Tasa: i = I / (C * t)
Tiempo: t = I / (C * i)
Estas fórmulas permiten resolver cualquier incógnita si se conocen tres de los cuatro elementos.
Se deben cuidar las unidades: la tasa debe estar en función del mismo periodo que el tiempo (años, meses, días).

2.3 Descuento comercial y racional simple
El descuento es una operación financiera que consiste en anticipar el valor de un documento (pagaré) antes de su vencimiento.

- Descuento comercial (también llamado simple o bancario):
  Fórmula: d = N * i * t
  Valor actual: A = N - d
  Donde:
  d = descuento
  N = valor nominal
  i = tasa de descuento
  t = tiempo hasta el vencimiento
  A = valor actual o efectivo recibido
- Descuento racional simple:
  El descuento se calcula sobre el valor actual.
  Fórmula: A = N / (1 + i * t)
  Descuento: d = N - A
  Se considera más justo porque descuenta sobre el valor real y no sobre el nominal.

2.4 Aplicaciones del interés simple en préstamos y pagarés
El interés simple es común en préstamos a corto plazo, adelantos de efectivo, y pagarés.

- En préstamos, se usa para calcular el interés que el prestatario debe pagar.
- En pagarés, se determina el valor presente del documento cuando se negocia antes de su vencimiento.
- También se utiliza para calcular la ganancia obtenida por inversiones de corto plazo, cuando los intereses no se reinvierten.

Este tipo de interés es fácil de aplicar, aunque menos preciso para periodos largos. Es útil en situaciones donde no hay capitalización ni reinversión de intereses.

10 ejercicios con solución sobre la Unidad 2: Interés Simple.

Ejercicio 1
Un capital de 3,000 euros se invierte al 4% anual durante 2 años. ¿Cuál es el interés generado?
Solución:
I = 3000 * 0.04 * 2 = 240
Explicación: se aplica la fórmula I = C * i * t

Ejercicio 2
¿Cuál es el monto total que se obtiene si se invierten 1,500 euros al 5% anual durante 3 años?
Solución:
I = 1500 * 0.05 * 3 = 225
Monto = 1500 + 225 = 1725
Explicación: se suman capital e interés

Ejercicio 3
Un capital genera 180 euros de interés en 2 años a una tasa del 6% anual. ¿Cuál fue el capital inicial?
Solución:
C = 180 / (0.06 * 2) = 180 / 0.12 = 1500
Explicación: se despeja el capital de la fórmula

Ejercicio 4
¿Cuánto tiempo debe invertirse un capital de 2,000 euros al 3% anual para obtener 180 euros de interés?
Solución:
t = 180 / (2000 * 0.03) = 180 / 60 = 3 años
Explicación: se despeja el tiempo de la fórmula

Ejercicio 5
Un pagaré con valor nominal de 4,000 euros se descuenta 4 meses antes de su vencimiento a una tasa del 6% anual. ¿Cuál es el descuento comercial simple?
Solución:
t = 4/12 = 0.333

d = 4000 * 0.06 * 0.333 ≈ 79.92
Explicación: se calcula el descuento sobre el nominal

Ejercicio 6
En el ejercicio anterior, ¿cuál es el valor actual del pagaré con descuento comercial?
Solución:
A = 4000 - 79.92 = 3920.08
Explicación: se resta el descuento al valor nominal

Ejercicio 7
¿Cuál es el valor actual de un pagaré de 5,000 euros descontado 90 días antes de su vencimiento con una tasa del 8% anual en descuento racional simple?
Solución:
t = 90 / 360 = 0.25
A = 5000 / (1 + 0.08 * 0.25) = 5000 / 1.02 ≈ 4901.96
Explicación: se aplica la fórmula del descuento racional simple

---

Ejercicio 8
En el ejercicio anterior, ¿cuál es el descuento racional aplicado?
Solución:
d = 5000 - 4901.96 = 98.04
Explicación: descuento racional = valor nominal - valor actual

---

Ejercicio 9
Una persona recibe 600 euros por anticipado hoy. Si el banco aplica un descuento comercial del 5% anual por 6 meses, ¿cuál es el valor nominal del pagaré?
Solución:
t = 0.5
A = 600
N = A / (1 - i * t) = 600 / (1 - 0.05 * 0.5) = 600 / 0.975 ≈ 615.38
Explicación: se despeja el nominal a partir del valor actual

Ejercicio 10
Un préstamo genera un interés simple de 400 euros en 10 meses. Si la tasa es del 8% anual, ¿cuál es el capital prestado?
Solución:
t = 10 / 12 = 0.833
C = 400 / (0.08 * 0.833) = 400 / 0.06664 ≈ 6004.80
Explicación: se ajusta el tiempo y se despeja el capital

Unidad 3: Interés Compuesto

3.1 Fórmula del monto compuesto
El interés compuesto es el que se calcula no solo sobre el capital inicial sino también sobre los intereses que se van generando en cada periodo.
La fórmula general para calcular el monto compuesto es:
M = C * (1 + i)^n
Donde:
M = monto acumulado
C = capital inicial
i = tasa de interés por periodo
n = número de periodos
El interés generado se puede obtener como:
I = M - C

3.2 Valor presente y valor futuro
El valor presente (VP) representa el capital que se necesita hoy para alcanzar un monto futuro determinado bajo interés compuesto.
Fórmula: VP = M / (1 + i)^n
El valor futuro (VF o M) es el monto que se obtiene en el futuro a partir de un capital presente bajo interés compuesto.
Fórmula: VF = C * (1 + i)^n
Estas fórmulas permiten trasladar valores monetarios entre distintos momentos del tiempo.

3.3 Capitalización periódica y continua

- Capitalización periódica: el interés se aplica en intervalos definidos (mensual, trimestral, anual). Se usa la fórmula M = C * (1 + i)^n
- Capitalización continua: el interés se capitaliza infinitamente en el tiempo.
  Fórmula: M = C * e^(i * t)
  Donde e es el número de Euler, aproximadamente 2.71828
  La capitalización continua se utiliza en modelos más avanzados, como los de crecimiento exponencial.

3.4 Tasas equivalentes en interés compuesto
Las tasas equivalentes permiten expresar una misma rentabilidad en diferentes periodos de capitalización.
Fórmula general para convertir tasas:
$(1 + i_1)^{(n_1)} = (1 + i_2)^{(n_2)}$
Para pasar de una tasa nominal a una tasa efectiva:
$i_e = (1 + i/m)^m - 1$
Donde m es el número de capitalizaciones por año
Para convertir de tasa efectiva anual a mensual:
$i_m = (1 + i_a)^{(1/12)} - 1$

3.5 Comparación entre interés simple y compuesto

- En interés simple, los intereses se calculan solo sobre el capital inicial.

- En interés compuesto, los intereses se reinvierten, generando nuevos intereses.
  El interés compuesto genera un crecimiento exponencial, mientras que el interés simple genera un crecimiento lineal.
  A largo plazo, el interés compuesto siempre genera mayores beneficios que el interés simple, aunque ambos coinciden en el primer periodo.

10 ejercicios con solución sobre la **Unidad 3: Interés Compuesto**,

---

Ejercicio 1
Un capital de 2,000 euros se invierte al 5% anual compuesto durante 3 años. ¿Cuál será el monto acumulado?
Solución:
M = 2000 * (1 + 0.05)^3 = 2000 * 1.157625 ≈ 2315.25
Explicación: se usa la fórmula del monto compuesto M = C * (1 + i)^n

---

Ejercicio 2
¿Cuál fue el capital inicial que generó 2,653.30 euros en 4 años al 6% compuesto anual?
Solución:
C = 2653.30 / (1 + 0.06)^4 = 2653.30 / 1.2625 ≈ 2102.46
Explicación: se aplica la fórmula del valor presente C = M / (1 + i)^n

---

Ejercicio 3
¿Cuál es el interés generado por un capital de 1,500 euros invertido a 8% compuesto anual durante 2 años?
Solución:
M = 1500 * (1 + 0.08)^2 = 1500 * 1.1664 = 1749.60
Interés = 1749.60 - 1500 = 249.60
Explicación: se calcula el monto y se resta el capital

Ejercicio 4
Convierte una tasa efectiva anual del 12% a tasa efectiva mensual.
Solución:
$i_m = (1 + 0.12)^{(1/12)} - 1 \approx 0.009488$ o 0.9488%
Explicación: se usa la fórmula de conversión de tasas efectivas

---

Ejercicio 5
Convierte una tasa nominal anual del 18% capitalizable trimestralmente a tasa efectiva anual.
Solución:
i = 0.18 / 4 = 0.045
$i_e = (1 + 0.045)^4 - 1 = 1.1856 - 1 = 0.1856$ o 18.56%
Explicación: se transforma de tasa nominal a efectiva

Ejercicio 6
¿Cuánto tiempo se debe invertir un capital de 1,000 euros al 10% compuesto anual para alcanzar

1,610.51 euros?
Solución:
M = 1000 * (1 + 0.10)^n
1.61051 = (1.10)^n → log(1.61051) / log(1.10) ≈ 5 años
Explicación: se despeja el tiempo usando logaritmos

Ejercicio 7
Un capital de 800 euros se invierte con capitalización continua a una tasa del 6% anual durante 3 años. ¿Cuál será el monto acumulado?
Solución:
M = 800 * e^(0.06 * 3) = 800 * e^0.18 ≈ 800 * 1.1972 ≈ 957.76
Explicación: se aplica la fórmula con capitalización continua

---

Ejercicio 8
Compara los intereses generados por un capital de 1,000 euros en 2 años al 6% simple y al 6% compuesto anual.
Solución:
Simple: I = 1000 * 0.06 * 2 = 120
Compuesto: M = 1000 * (1.06)^2 = 1123.60 → I = 123.60
Diferencia: 123.60 - 120 = 3.60 euros
Explicación: se comparan ambos métodos

Ejercicio 9
Un capital se triplica en 9 años a interés compuesto anual. ¿Cuál es la tasa anual aproximada?
Solución:
M = C * (1 + i)^9 → 3C = C * (1 + i)^9
3 = (1 + i)^9 → log(3) / 9 = log(1 + i)
log(3) ≈ 0.4771 → log(1 + i) = 0.0530 → 1 + i ≈ 10^0.0530 ≈ 1.129
i ≈ 0.129 o 12.9%
Explicación: se despeja i usando logaritmos

Ejercicio 10
¿Qué tasa efectiva anual es equivalente a una tasa nominal del 24% capitalizable mensualmente?
Solución:
i = 0.24 / 12 = 0.02
i_e = (1 + 0.02)^12 - 1 ≈ 1.2682 - 1 = 0.2682 o 26.82%
Explicación: se usa la fórmula de equivalencia de tasas

Unidad 4: Rentas o Anualidades

4.1 Clasificación de rentas: ordinarias, anticipadas, perpetuas
Una **renta o anualidad** es una sucesión de pagos o cobros iguales que se efectúan en intervalos regulares de tiempo.
Según el momento en que se realizan los pagos, las rentas se clasifican en:

- **Renta ordinaria o vencida:** los pagos se efectúan al final de cada periodo.
- **Renta anticipada:** los pagos se realizan al comienzo de cada periodo.
- **Renta perpetua:** los pagos se extienden indefinidamente en el tiempo, sin vencimiento.

4.2 Valor futuro y valor presente de una renta
El **valor futuro (VF)** es el monto acumulado al final del plazo de la renta.
Para rentas vencidas:
VF = R * [((1 + i)^n - 1) / i]
Para rentas anticipadas:
VF = R * [((1 + i)^n - 1) / i] * (1 + i)

El **valor presente (VP)** es el valor equivalente hoy de los pagos futuros.
Para rentas vencidas:
VP = R * [1 - (1 + i)^-n] / i
Para rentas anticipadas:
VP = R * [1 - (1 + i)^-n] / i * (1 + i)
Donde:
R = renta periódica
i = tasa de interés por periodo
n = número de pagos

4.3 Anualidades vencidas y anticipadas

- En una **anualidad vencida**, el primer pago se realiza al final del primer periodo.
- En una **anualidad anticipada**, el primer pago se realiza al inicio del primer periodo.
  Las fórmulas de valor presente y futuro varían en un factor multiplicativo de (1 + i) para las anticipadas.
  Este ajuste refleja el hecho de que cada pago se realiza un periodo antes y genera un interés adicional.

4.4 Renta perpetua y renta diferida

- **Renta perpetua:** es una serie infinita de pagos iguales que no tienen fin.
  Fórmula del valor presente:
  VP = R / i
  Se utiliza cuando se desea valorar ingresos constantes indefinidos, como donaciones o ciertos títulos.
- **Renta diferida:** es aquella en la que los pagos comienzan después de un número determinado de periodos.
  Para calcular su valor presente, se traslada primero el valor de la renta al momento en que comienza y luego al presente.

4.5 Aplicaciones en amortizaciones y fondos de inversión
Las rentas son fundamentales en el cálculo de:

- **Amortizaciones de préstamos**, donde los pagos periódicos cubren intereses y parte del capital.
- **Fondos de inversión**, donde aportes periódicos se acumulan a una tasa de interés.
  En ambos casos, se utilizan las fórmulas de rentas para determinar el monto final, el valor presente, o el importe de cada cuota.

10 ejercicios con solución sobre la Unidad 4: Rentas o Anualidades.

Ejercicio 1
Una persona deposita 500 euros al final de cada año durante 5 años en una cuenta que paga 6% anual. ¿Cuál será el valor futuro al final del periodo?
Solución:
VF = 500 * [(1 + 0.06)^5 - 1] / 0.06 = 500 * [1.3382 - 1] / 0.06 ≈ 500 * 5.6367 ≈ 2818.35
Explicación: se aplica la fórmula del valor futuro de una renta vencida

---

Ejercicio 2
¿Cuál es el valor presente de una renta anual de 800 euros durante 4 años con una tasa de interés del 5% anual?
Solución:
VP = 800 * [1 - (1 + 0.05)^-4] / 0.05 = 800 * [1 - 0.8227] / 0.05 ≈ 800 * 3.546 ≈ 2836.80
Explicación: se usa la fórmula de valor presente de una renta vencida

---

Ejercicio 3
Una persona realiza pagos de 1,000 euros al comienzo de cada año durante 3 años a una tasa del 10% anual. ¿Cuál es el valor presente de esta renta anticipada?
Solución:
VP = 1000 * [1 - (1 + 0.10)^-3] / 0.10 * (1 + 0.10)
VP = 1000 * [1 - 0.7513] / 0.10 * 1.10 ≈ 1000 * 2.487 * 1.10 ≈ 2735.70
Explicación: se aplica la fórmula de renta anticipada

Ejercicio 4
Se desea saber cuánto se acumula si se deposita 200 euros al inicio de cada mes durante 2 años a una tasa del 1% mensual.
Solución:
VF = 200 * [(1 + 0.01)^24 - 1] / 0.01 * (1 + 0.01)
VF ≈ 200 * 26.978 * 1.01 ≈ 200 * 27.248 ≈ 5449.60
Explicación: renta anticipada mensual con capitalización mensual

---

Ejercicio 5
¿Cuánto debe depositar mensualmente una persona durante 10 años en un fondo al 0.5% mensual para acumular 50,000 euros?
Solución:

VF = R * [(1 + 0.005)^120 - 1] / 0.005
[(1.005)^120 - 1] / 0.005 ≈ 81.94
R = 50000 / 81.94 ≈ 610.17
Explicación: se despeja R de la fórmula del valor futuro

Ejercicio 6
Una empresa paga una renta perpetua de 2,000 euros al año. Si la tasa de interés es 8% anual, ¿cuál es su valor presente?
Solución:
VP = 2000 / 0.08 = 25,000
Explicación: se usa la fórmula de renta perpetua VP = R / i

Ejercicio 7
Una renta de 300 euros mensuales comienza a pagarse dentro de 6 meses y dura 12 meses. La tasa es del 1% mensual. ¿Cuál es su valor presente hoy?
Solución:
VP renta = 300 * [1 - (1.01)^-12] / 0.01 ≈ 300 * 11.256 ≈ 3376.80
Trasladar al presente: VP = 3376.80 / (1.01)^6 ≈ 3376.80 / 1.0615 ≈ 3179.00
Explicación: es una renta diferida, se calcula su valor presente al mes 6 y se descuenta a hoy

---

Ejercicio 8
Un préstamo de 10,000 euros debe pagarse en 5 cuotas anuales iguales al 6% anual. ¿Cuál es el valor de cada cuota?
Solución:
R = 10000 / [1 - (1 + 0.06)^-5] / 0.06 = 10000 / 4.212 ≈ 2373.00
Explicación: se despeja R de la fórmula del valor presente

Ejercicio 9
¿Cuál será el valor acumulado de 400 euros al final de cada trimestre durante 3 años a una tasa trimestral del 2%?
Solución:
n = 3 * 4 = 12
VF = 400 * [(1 + 0.02)^12 - 1] / 0.02 ≈ 400 * 13.267 ≈ 5306.80
Explicación: se calcula valor futuro de una renta trimestral vencida

---

Ejercicio 10
Una persona necesita 15,000 euros dentro de 5 años. ¿Cuánto debe depositar anualmente si el interés compuesto es del 5%?
Solución:
VF = R * [(1.05)^5 - 1] / 0.05 = R * 5.526
R = 15000 / 5.526 ≈ 2715.32
Explicación: se despeja R de la fórmula del valor futuro

Unidad 5: Amortización de Préstamos

5.1 Concepto de amortización
La amortización es el proceso de devolución de un préstamo mediante pagos periódicos que incluyen una parte de capital (deuda) y una parte de intereses.
Cada pago reduce el saldo pendiente hasta que la deuda queda completamente saldada.
Los pagos pueden ser constantes o variables, según el sistema de amortización que se utilice.

5.2 Sistemas de amortización: francés, alemán y americano

- **Sistema francés:** también llamado de cuota fija. La cuota es constante y en cada periodo se paga menos interés y más capital.
  Fórmula de la cuota:
  R = P * [i * (1 + i)^n] / [(1 + i)^n - 1]
  Donde:
  R = cuota fija
  P = capital inicial
  i = tasa de interés por periodo
  n = número de pagos
- **Sistema alemán:** la amortización de capital es constante y los intereses van disminuyendo. La cuota total varía, siendo decreciente.
  Amortización fija: A = P / n
  Interés: I = saldo pendiente * i
  Cuota: C = A + I
- **Sistema americano:** solo se pagan intereses periódicamente y el capital se amortiza completamente en el último periodo.
  Interés periódico: I = P * i
  Última cuota: I + P

5.3 Cuadro de amortización
Un cuadro de amortización detalla el desglose de cada cuota en:

- Interés del periodo
- Amortización de capital
- Cuota total
- Saldo pendiente
  Se construye para visualizar la evolución del préstamo a lo largo del tiempo y comparar distintos sistemas.

5.4 Cálculo de cuota fija y saldo insoluto

- **Cuota fija:** se calcula aplicando la fórmula del sistema francés.
- **Saldo insoluto:** es el capital pendiente de pago después de una o varias cuotas.
  Se puede calcular restando las amortizaciones acumuladas o como valor presente de las cuotas restantes:
  Saldo = R * [1 - (1 + i)^-(n - k)] / i
  Donde k es el número de cuotas ya pagadas

5.5 Aplicaciones bancarias y financieras
La amortización de préstamos se aplica en:

- Créditos personales, hipotecarios, automotrices
- Financiamiento de empresas y leasing
- Planificación de pagos, refinanciaciones y análisis de viabilidad
  Los sistemas de amortización permiten determinar el impacto de un préstamo en el flujo de caja del deudor y comparar diferentes condiciones de financiamiento.

10 ejercicios con solución para la Unidad 5: Amortización de Préstamos.

Ejercicio 1
Un préstamo de 10,000 euros se amortiza en 4 años con cuotas anuales fijas al 5% anual usando el sistema francés. Calcula la cuota anual.
Solución:
R = 10000 * [0.05 * (1 + 0.05)^4] / [(1 + 0.05)^4 - 1]
R = 10000 * [0.05 * 1.2155] / [1.2155 - 1] = 10000 * 0.06078 / 0.2155 ≈ 2821.16
Explicación: fórmula de cuota fija en sistema francés

Ejercicio 2
En el sistema alemán, calcula la amortización y el interés del primer año para un préstamo de 12,000 euros a 3 años con tasa anual del 6%.
Solución:
Amortización fija A = 12000 / 3 = 4000
Interés I = 12000 * 0.06 = 720
Cuota C = 4000 + 720 = 4720
Explicación: amortización constante y cálculo de interés sobre saldo inicial

---

Ejercicio 3
Con sistema americano, para un préstamo de 15,000 euros a 5 años con tasa anual del 7%, calcula el pago anual de intereses y la última cuota total.
Solución:
Interés anual I = 15000 * 0.07 = 1050
Última cuota = interés + capital = 1050 + 15000 = 16050
Explicación: pago solo intereses hasta el último año donde se paga el capital completo

---

Ejercicio 4
El préstamo del ejercicio 1, calcula el saldo insoluto después de pagar 2 cuotas.
Solución:
Saldo = R * [1 - (1 + i)^{-(n - k)}] / i
Saldo = 2821.16 * [1 - (1.05)^{-(4-2)}] / 0.05
Saldo = 2821.16 * [1 - 0.9070] / 0.05 = 2821.16 * 1.8598 ≈ 5249.90
Explicación: saldo pendiente como valor presente de cuotas restantes

---

Ejercicio 5
En sistema francés, para un préstamo de 8000 euros a 3 años con tasa del 8% anual, calcula el interés y amortización de la primera cuota.
Solución:
Cuota R = 8000 * [0.08 * (1.08)^3] / [(1.08)^3 - 1] = 8000 * 0.1005 / 0.2597 ≈ 3095.78
Interés primer año I = 8000 * 0.08 = 640
Amortización A = 3095.78 - 640 = 2455.78
Explicación: desglosar la cuota fija en interés y amortización

---

Ejercicio 6
Para un préstamo de 20,000 euros en sistema alemán a 5 años con tasa 5%, calcula la cuota del segundo año si el saldo al inicio de ese año es 16,000 euros.
Solución:
Amortización fija A = 20000 / 5 = 4000
Interés I = 16000 * 0.05 = 800
Cuota C = 4000 + 800 = 4800
Explicación: amortización constante, interés sobre saldo restante

---

Ejercicio 7
En sistema francés, un préstamo de 25,000 euros a 6 años al 9% anual tiene cuota anual de 5462.26 euros. Calcula el saldo insoluto después de 3 pagos.
Solución:
Saldo = 5462.26 * [1 - (1.09)^{-(6-3)}] / 0.09
Saldo = 5462.26 * [1 - 0.7722] / 0.09 = 5462.26 * 2.531 = 13822.92
Explicación: saldo como valor presente de cuotas restantes

Ejercicio 8
Un préstamo de 18,000 euros bajo sistema americano con tasa 6% anual. ¿Cuánto paga en intereses anualmente y cuánto la última cuota?
Solución:
Interés anual = 18000 * 0.06 = 1080
Última cuota = 1080 + 18000 = 19080
Explicación: intereses pagados cada año y capital al final

Ejercicio 9
Un préstamo de 9000 euros a 3 años bajo sistema francés con tasa 10% anual tiene cuota fija de 3471.22 euros. Calcula amortización e interés del segundo año si el saldo al inicio es 6000 euros.
Solución:
Interés segundo año I = 6000 * 0.10 = 600
Amortización A = 3471.22 - 600 = 2871.22
Explicación: se usa cuota fija menos intereses para obtener amortización

---

Ejercicio 10
En sistema alemán, calcula la cuota total del tercer año para un préstamo de 15,000 euros a 5 años

con tasa anual 7%, sabiendo que el saldo al inicio del tercer año es 9000 euros.
Solución:
Amortización fija A = 15000 / 5 = 3000
Interés I = 9000 * 0.07 = 630
Cuota C = 3000 + 630 = 3630
Explicación: amortización constante, interés sobre saldo actual

---

Unidad 6: Evaluación Financiera de Proyectos

6.1 Flujo de caja
El flujo de caja representa la entrada y salida de dinero en un proyecto durante un periodo determinado. Se calcula para cada periodo considerando ingresos, costos, inversiones y gastos. El análisis del flujo de caja es fundamental para evaluar la viabilidad financiera de un proyecto.

6.2 Valor presente neto (VPN)
El VPN es la suma de los flujos de caja futuros descontados a una tasa de interés determinada, menos la inversión inicial.
Fórmula:
VPN = ∑ (Flujo de caja en periodo t) / (1 + i)^t - Inversión inicial
Donde i es la tasa de descuento y t el periodo.
Un VPN positivo indica que el proyecto genera valor y es viable.

6.3 Tasa interna de retorno (TIR)
La TIR es la tasa de interés que iguala el valor presente de los flujos de caja futuros con la inversión inicial, es decir, hace que el VPN sea cero.
Se calcula generalmente por métodos iterativos o con calculadora financiera.
Un proyecto es aceptable si la TIR es mayor que la tasa mínima requerida.

6.4 Periodo de recuperación de la inversión
Es el tiempo que tarda un proyecto en recuperar la inversión inicial mediante los flujos de caja acumulados.
Se calcula sumando los flujos de caja hasta que igualen la inversión inicial.
Un periodo corto indica menor riesgo y mayor liquidez.

6.5 Índice de rentabilidad
Es la relación entre el valor presente de los flujos de caja futuros y la inversión inicial.
Fórmula:
Índice de rentabilidad = Valor presente de flujos futuros / Inversión inicial
Un índice mayor que 1 indica que el proyecto es rentable.

10 ejercicios con solución para la Unidad 6: Evaluación Financiera de Proyectos.

Ejercicio 1
Un proyecto requiere una inversión inicial de 50,000 euros y genera flujos de caja anuales de 15,000 euros por 5 años. Si la tasa de descuento es 8%, calcula el Valor Presente Neto (VPN).
Solución:
VPN = ∑ (15000 / (1+0.08)^t) - 50000, con t=1 a 5
VPN = 15000*(1 - (1+0.08)^-5)/0.08 - 50000 ≈ 15000*3.993 - 50000 = 59900 - 50000 = 9900
Explicación: uso de fórmula de anualidad para sumar flujos descontados

---

Ejercicio 2
Calcula la Tasa Interna de Retorno (TIR) para un proyecto con inversión inicial de 30,000 euros y flujos de caja anuales de 8000 euros por 5 años.
Solución:
Se busca i tal que VPN = 0:
30000 = 8000*(1 - (1+i)^-5)/i
Por prueba o calculadora financiera, TIR ≈ 14.5%
Explicación: se iguala inversión con valor presente de flujos y se despeja i

---

Ejercicio 3
Para un proyecto con inversión de 40,000 euros y flujos de caja anuales de 10,000 euros, calcula el periodo de recuperación de la inversión (sin descuento).
Solución:
Años para recuperar = 40000 / 10000 = 4 años
Explicación: suma simple de flujos hasta igualar inversión

Ejercicio 4
Calcula el índice de rentabilidad para un proyecto con valor presente de flujos futuros de 60,000 euros y una inversión inicial de 50,000 euros.
Solución:
Índice = 60000 / 50000 = 1.2
Explicación: índice mayor que 1 indica rentabilidad

Ejercicio 5
Un proyecto tiene los siguientes flujos: año 1= 12,000, año 2= 15,000, año 3= 20,000. La inversión inicial es 40,000 y la tasa de descuento 10%. Calcula el VPN.
Solución:
VPN = 12000/1.1 + 15000/(1.1)^2 + 20000/(1.1)^3 - 40000
VPN = 10909 + 12397 + 15026 - 40000 = 38332 - 40000 = -1668
Explicación: flujos descontados al presente menos inversión

Ejercicio 6
Calcula la TIR para el proyecto del ejercicio 5.
Solución:
Se busca i tal que VPN=0:
40000 = 12000/(1+i) + 15000/(1+i)^2 + 20000/(1+i)^3
Por aproximación, TIR ≈ 9%
Explicación: se prueba tasa que hace VPN cercano a 0

Ejercicio 7
Para un proyecto con inversión de 100,000 euros y flujos anuales constantes de 25,000 euros, calcula el periodo de recuperación descontado al 8%.

Solución:
Se suman flujos descontados:
Año 1: 23148, Año 2: 21451, Año 3: 19868, Año 4: 18415
Acumulado año 4 = 82882 < 100000
Año 5: 17057
Acumulado año 5 = 99939 ≈ 100000
Periodo ≈ 5 años
Explicación: suma de flujos descontados hasta recuperar inversión

---

Ejercicio 8
Un proyecto tiene una inversión inicial de 60,000 euros y flujos futuros cuyo valor presente es 72,000 euros. Calcula el índice de rentabilidad.
Solución:
Índice = 72000 / 60000 = 1.2
Explicación: índice mayor que 1 es rentable

Ejercicio 9
Calcula el VPN para un proyecto que tiene inversión inicial 25,000 euros y flujos: año 1= 8000, año 2= 10000, año 3= 12000, tasa descuento 9%.
Solución:
VPN = 8000/1.09 + 10000/(1.09)^2 + 12000/(1.09)^3 - 25000
VPN = 7339 + 8417 + 9272 - 25000 = 25028 - 25000 = 28
Explicación: suma de flujos descontados menos inversión

Ejercicio 10
Para el proyecto del ejercicio 9, ¿cuál es el periodo de recuperación sin descuento?
Solución:
Suma flujos año 1 y 2: 8000 + 10000 = 18000 < 25000
Con año 3: 18000 + 12000 = 30000 > 25000
Periodo = 2 + (25000-18000)/12000 = 2 + 0.58 = 2.58 años
Explicación: se calcula fracción del último año para recuperar inversión

Unidad 7: Inflación y Tasa Real

7.1 Inflación y poder adquisitivo
La inflación es el aumento generalizado y sostenido de los precios de bienes y servicios en una economía durante un periodo. Cuando hay inflación, el poder adquisitivo del dinero disminuye, es decir, con la misma cantidad de dinero se pueden comprar menos bienes o servicios que antes. Esto afecta directamente las decisiones financieras y el valor real del dinero en el tiempo.

7.2 Tasa de interés nominal vs tasa real
La tasa de interés nominal es la tasa que se acuerda o se observa en el mercado sin ajustar por inflación. La tasa real, en cambio, es la tasa que refleja el rendimiento o costo efectivo descontando la inflación.
La relación entre ellas es:
Tasa real ≈ Tasa nominal - Inflación (cuando la inflación es baja)
De forma más precisa:
(1 + tasa nominal) = (1 + tasa real) * (1 + inflación)
La tasa real indica el verdadero poder de ganancia o pérdida de valor en términos de poder adquisitivo.

7.3 Ajuste por inflación en cálculos financieros
Para evaluar inversiones o créditos en ambientes con inflación, es necesario ajustar los valores y tasas para reflejar el poder adquisitivo real. Esto puede hacerse usando tasas reales o ajustando flujos de caja según índices de precios. Así, se obtiene una valoración financiera más precisa y adecuada para la toma de decisiones.

8 ejercicios con solución para la Unidad 7: Inflación y Tasa Real.

Ejercicio 1
La tasa de inflación anual es 5% y la tasa de interés nominal de un préstamo es 12%. Calcula la tasa de interés real aproximada.
Solución:
Tasa real ≈ Tasa nominal - Inflación = 12% - 5% = 7%
Explicación: método aproximado válido para inflación baja

Ejercicio 2
Con una tasa nominal de 10% y una inflación de 8%, calcula la tasa real usando la fórmula precisa.
Solución:
(1 + tasa nominal) = (1 + tasa real) * (1 + inflación)
1.10 = (1 + tasa real) * 1.08
Tasa real = (1.10 / 1.08) - 1 = 0.0185 o 1.85%
Explicación: ajuste exacto considerando efecto compuesto

Ejercicio 3
Si una inversión genera un rendimiento nominal anual de 15% y la inflación es 6%, ¿cuál es el rendimiento real?
Solución:

Tasa real = (1 + 0.15)/(1 + 0.06) - 1 = 1.15/1.06 - 1 = 0.0849 o 8.49%
Explicación: tasa ajustada por inflación para conocer ganancia real

---

Ejercicio 4
Un consumidor tiene un salario de 1000 euros mensuales. Si la inflación anual es 4%, ¿cuánto debería aumentar su salario para mantener el poder adquisitivo?
Solución:
Aumento necesario = 1000 * 0.04 = 40 euros
Nuevo salario = 1000 + 40 = 1040 euros
Explicación: aumento igual al porcentaje de inflación

Ejercicio 5
Calcula el valor futuro real de 5000 euros después de 3 años, con tasa nominal 9% y tasa de inflación 4%.
Solución:
Valor futuro nominal = 5000 * (1 + 0.09)^3 = 5000 * 1.295 = 6475 euros
Valor futuro real = Valor futuro nominal / (1 + inflación)^3 = 6475 / (1.04)^3 = 6475 / 1.125 = 5755 euros
Explicación: se descuenta inflación para conocer valor en poder adquisitivo actual

---

Ejercicio 6
Una tasa nominal anual es de 7% con inflación de 3%, calcula la tasa real usando aproximación y fórmula exacta.
Solución:
Aproximación: 7% - 3% = 4%
Exacta: (1.07 / 1.03) - 1 = 0.0388 o 3.88%
Explicación: pequeña diferencia entre métodos

Ejercicio 7
Si un bono paga intereses nominales de 6% anual y la inflación es de 5%, ¿cuál es el rendimiento real para el inversionista?
Solución:
Rendimiento real = (1 + 0.06) / (1 + 0.05) - 1 = 1.06 / 1.05 - 1 = 0.0095 o 0.95%
Explicación: ajuste de rendimiento nominal descontando inflación

---

Ejercicio 8
Calcula el ajuste necesario para un monto de 20,000 euros después de 2 años, con inflación anual 7%.
Solución:
Monto ajustado = 20000 * (1 + 0.07)^2 = 20000 * 1.1449 = 22898 euros
Explicación: ajuste para mantener poder adquisitivo con inflación

---

Unidad 8: Instrumentos Financieros

8.1 Bonos y obligaciones
Los bonos son títulos de deuda emitidos por empresas o gobiernos para financiarse. Representan un préstamo que el comprador hace al emisor a cambio del pago de intereses periódicos y la devolución del capital al vencimiento. Las obligaciones son bonos a largo plazo, generalmente con plazos mayores a 10 años. El precio del bono depende de la tasa de interés del mercado y las condiciones específicas del bono, como el cupón, vencimiento y riesgo.

8.2 Acciones: rendimiento y valor presente
Las acciones representan propiedad parcial en una empresa. Su rendimiento puede venir de dividendos y de la apreciación del precio. Para valorar una acción, se calcula el valor presente de los dividendos futuros esperados o del flujo de caja libre descontado a una tasa que refleja el riesgo. Las acciones son instrumentos de renta variable y su precio puede fluctuar significativamente.

8.3 Valoración de instrumentos financieros
La valoración consiste en determinar el valor presente de los flujos futuros que genera un instrumento, descontados a una tasa adecuada. Para bonos, se descuentan los cupones y el valor nominal. Para acciones, se descuentan dividendos o flujos de caja. Otros instrumentos pueden incluir derivados o fondos de inversión, cuya valoración puede requerir modelos específicos.

8.4 Tasas de rendimiento de inversiones
La tasa de rendimiento mide la ganancia o pérdida obtenida de una inversión. Puede expresarse como tasa nominal, tasa efectiva o tasa anualizada. Se calcula considerando ingresos por intereses, dividendos, plusvalías y el valor inicial y final de la inversión. La tasa interna de retorno (TIR) es una tasa que iguala el valor presente de los ingresos futuros con la inversión inicial y es ampliamente usada para evaluar proyectos e inversiones.

8 ejercicios con solución para la Unidad 8: Instrumentos Financieros.

Ejercicio 1
Un bono paga un cupón anual de 50 euros, su valor nominal es 1000 euros y vence en 5 años. Si la tasa de mercado es 6%, calcula el precio del bono.
Solución:
Precio bono = suma de valor presente de cupones + valor presente del nominal
Cupones PV = 50 × [1 - (1 + 0.06)^-5] / 0.06 = 50 × 4.2124 = 210.62 euros
Valor nominal PV = 1000 / (1.06)^5 = 747.26 euros
Precio bono = 210.62 + 747.26 = 957.88 euros
Explicación: se descuentan todos los flujos futuros al valor presente con la tasa de mercado

---

Ejercicio 2
Una acción paga dividendos de 2 euros por acción, que se espera crezcan un 3% anual. Si la tasa de descuento es 8%, calcula el valor presente de la acción usando el modelo de crecimiento Gordon.
Solución:
Valor acción = Dividendo / (Tasa descuento - tasa crecimiento) = 2 / (0.08 - 0.03) = 40 euros
Explicación: fórmula para valor presente de dividendos crecientes indefinidamente

---

Ejercicio 3
Una obligación tiene un valor nominal de 2000 euros, paga intereses semestrales de 60 euros, y vence en 4 años. Si la tasa de interés de mercado semestral es 3%, calcula el precio de la obligación.
Solución:
Número de periodos = 4 × 2 = 8
PV cupones = 60 × [1 - (1 + 0.03)^-8] / 0.03 = 60 × 6.732 = 403.92 euros
PV nominal = 2000 / (1.03)^8 = 1595.46 euros
Precio obligación = 403.92 + 1595.46 = 1999.38 euros
Explicación: se aplican fórmulas de valor presente para cupones y valor nominal

---

Ejercicio 4
Calcula la tasa interna de retorno (TIR) para un proyecto que requiere una inversión de 5000 euros y genera flujos de caja de 1500 euros anuales por 5 años.
Solución:
La TIR es la tasa r que cumple:
5000 = 1500 × [1 - (1 + r)^-5] / r
Probando r = 15%
1500 × [1 - (1.15)^-5] / 0.15 = 1500 × 3.352 = 5028 > 5000
Probando r = 16%
1500 × [1 - (1.16)^-5] / 0.16 = 1500 × 3.204 = 4806 < 5000
Interpolando, TIR ≈ 15.4%
Explicación: se busca tasa que iguala inversión con valor presente flujos futuros

---

Ejercicio 5
Un inversor compra una acción por 50 euros, recibe dividendos de 3 euros el primer año, con un crecimiento esperado del 5% anual. ¿Cuál será el rendimiento esperado?
Solución:
Rendimiento esperado = (Dividendo / Precio) + tasa crecimiento = (3 / 50) + 0.05 = 0.06 + 0.05 = 11%
Explicación: rendimiento total es dividend yield más crecimiento esperado

---

Ejercicio 6
Calcula el valor presente de un bono que paga un cupón anual de 80 euros, tiene valor nominal 1000 euros, vence en 10 años y la tasa de descuento es 7%.
Solución:
PV cupones = 80 × [1 - (1 + 0.07)^-10] / 0.07 = 80 × 7.0236 = 561.89 euros
PV nominal = 1000 / (1.07)^10 = 508.35 euros
Precio bono = 561.89 + 508.35 = 1070.24 euros
Explicación: descuento de cupones y capital a valor presente

Ejercicio 7
Una acción tiene un precio de 30 euros y paga dividendos constantes de 1.5 euros anuales. Calcula la tasa de rendimiento esperada.
Solución:

Rendimiento esperado = Dividendo / Precio = 1.5 / 30 = 0.05 o 5%
Explicación: tasa basada en dividendos constantes

Ejercicio 8
Un proyecto requiere una inversión inicial de 8000 euros y genera flujos netos de 2500 euros anuales durante 4 años. Si la tasa de descuento es 10%, calcula el valor presente neto (VPN).
Solución:
VPN = -8000 + 2500 × [1 - (1 + 0.10)^-4] / 0.10 = -8000 + 2500 × 3.1699 = -8000 + 7924.75 = -75.25 euros
Explicación: VPN negativo indica proyecto no rentable al 10%

Unidad 9: Tópicos Avanzados

9.1 Interés continuo
El interés continuo es un tipo de capitalización donde el interés se calcula y añade al capital de forma constante e instantánea. La fórmula para calcular el monto con interés continuo es:
$M = C \times e^{(rt)}$
donde M es el monto, C el capital inicial, r la tasa de interés anual, t el tiempo en años, y e es la base del logaritmo natural (aproximadamente 2.71828). Este modelo es usado en finanzas avanzadas y cálculo financiero.

9.2 Gradientes aritméticos y geométricos
Los gradientes son secuencias de pagos o ingresos que cambian periódicamente.

- Gradiente aritmético: los pagos aumentan o disminuyen en una cantidad fija cada periodo. Por ejemplo, un pago inicial de 100 que aumenta 10 cada año.
- Gradiente geométrico: los pagos cambian en proporción o porcentaje constante cada periodo. Por ejemplo, un pago inicial de 100 que crece un 5% cada año.
  Se utilizan fórmulas específicas para calcular valores presentes o futuros de estos gradientes.

9.3 Modelos financieros para decisiones empresariales
Se utilizan modelos matemáticos y estadísticos para evaluar y tomar decisiones financieras, como análisis de sensibilidad, simulaciones Monte Carlo, y optimización de portafolios. Estos modelos ayudan a valorar riesgos, seleccionar proyectos y maximizar utilidades, considerando variables inciertas y condiciones cambiantes.

9.4 Derivación de fórmulas financieras
Esta sección se enfoca en el desarrollo matemático y la deducción de fórmulas usadas en matemáticas financieras, como las fórmulas de interés simple, compuesto, anualidades y amortizaciones. Comprender la derivación permite un uso más consciente y flexible de las fórmulas en distintos contextos.

Aquí tienes 8 ejercicios con solución para la Unidad 9: Tópicos Avanzados.

Ejercicio 1
Calcula el monto acumulado con interés continuo de un capital de 5000 euros al 6% anual durante 3 años.
Solución:
$M = 5000 \times e^{(0.06 \times 3)} = 5000 \times e^{0.18} = 5000 \times 1.1972 = 5986$ euros
Explicación: se usa la fórmula de interés continuo con base e

---

Ejercicio 2
Un gradiente aritmético comienza con un pago de 1000 euros y aumenta 200 euros cada año. Calcula el valor presente de los pagos durante 5 años, con tasa de interés del 8% anual.
Solución:
Valor presente = suma de valores descontados considerando el aumento anual, se usa fórmula de gradiente aritmético:
$VP = P \times [1 - (1+i)^{-n}]/i + G \times \{[1 - (1+i)^{-n}]/i - n(1+i)^{-n}\}/i$

donde P=1000, G=200, i=0.08, n=5
Calculando:
VP pagos constantes = 1000 × 3.993 = 3993
VP gradiente = 200 × (3.993 - 5 × 0.6806)/0.08 = 200 × (3.993 - 3.403)/0.08 = 200 × 7.375 = 1475
VP total = 3993 + 1475 = 5468 euros
Explicación: se suman el valor presente de pagos iniciales y el gradiente aritmético descontado

---

Ejercicio 3
Un gradiente geométrico comienza con un pago de 500 euros y crece un 10% anual. Calcula el valor presente de los pagos durante 4 años con tasa de interés 12%.
Solución:
VP = P × [1 - ((1+g)/(1+i))^n] / (i - g)
donde P=500, g=0.10, i=0.12, n=4
VP = 500 × [1 - (1.10/1.12)^4] / (0.12 - 0.10)
= 500 × [1 - (0.9821)^4] / 0.02
= 500 × [1 - 0.9315] / 0.02
= 500 × 0.0685 / 0.02 = 500 × 3.425 = 1712.5 euros
Explicación: se aplica fórmula de valor presente para gradiente geométrico

---

Ejercicio 4
Explica por qué el modelo de interés compuesto es una aproximación del interés continuo cuando el número de periodos de capitalización tiende a infinito.
Solución:
El interés compuesto se calcula como M = C × (1 + r/n)^(nt), donde n es el número de periodos por año. Cuando n → ∞, (1 + r/n)^(nt) → e^(rt), que es la fórmula de interés continuo.
Explicación: el límite matemático de la fórmula compuesta da origen al interés continuo

---

Ejercicio 5
Deriva la fórmula del monto para interés simple M = C(1 + rt) a partir del concepto básico de interés.
Solución:
Interés (I) = Capital × tasa × tiempo = C × r × t
Monto (M) = Capital + interés = C + I = C + C × r × t = C(1 + rt)
Explicación: suma capital inicial y el interés generado linealmente

---

Ejercicio 6
Un proyecto tiene flujos de caja crecientes geométricamente con tasa de crecimiento del 4%, el primer flujo es de 2000 euros y la tasa de descuento es 7%. ¿Cuál es el valor presente de 6 flujos?
Solución:
VP = P × [1 - ((1+g)/(1+i))^n] / (i - g)
P=2000, g=0.04, i=0.07, n=6
VP = 2000 × [1 - (1.04/1.07)^6] / (0.07 - 0.04)
= 2000 × [1 - (0.971)^6] / 0.03
= 2000 × [1 - 0.833] / 0.03

= 2000 × 0.167 / 0.03 = 2000 × 5.56 = 11120 euros
Explicación: fórmula de valor presente para flujos con crecimiento geométrico

---

Ejercicio 7
Un inversor desea saber la tasa de interés efectiva anual si la tasa nominal es 12% capitalizable mensualmente.
Solución:
Tasa efectiva anual = (1 + r/m)^m - 1
r=0.12, m=12
TEA = (1 + 0.12/12)^12 - 1 = (1 + 0.01)^12 - 1 = 1.1268 - 1 = 0.1268 o 12.68%
Explicación: cálculo de tasa efectiva a partir de tasa nominal y periodos de capitalización

---

Ejercicio 8
Demuestra cómo se deriva la fórmula para el valor presente de una anualidad vencida: VP = R × [1 - (1+i)^-n]/i
Solución:
El valor presente es la suma de R/(1+i)^t para t=1 a n
VP = R × [1/(1+i) + 1/(1+i)^2 + ... + 1/(1+i)^n]
Esto es una serie geométrica con razón 1/(1+i)
La suma es: VP = R × [(1 - (1+i)^-n) / i]
Explicación: suma de serie geométrica descontada a tasa i

ANEXO

A. Cuadro de números primos del 1 al 1000

Un número primo es aquel mayor que uno que solo tiene dos divisores positivos: él mismo y la unidad. El conocimiento de los números primos es esencial en diversos temas como la factorización, los MCD y los MCM.

Números primos entre 1 y 100:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Del 101 al 200:
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

Y así hasta el 1000. La identificación de los primos se puede realizar utilizando el método de la criba de Eratóstenes, una técnica eficiente que elimina los múltiplos de cada primo.

B. Tabla de unidades y conversiones

La aritmética práctica exige el dominio de unidades de medida y su conversión. Esta tabla resume algunas unidades frecuentes y sus equivalencias.

Longitud:
1 km = 1000 m
1 m = 100 cm
1 cm = 10 mm

Masa:
1 kg = 1000 g
1 g = 1000 mg

Capacidad:
1 l = 1000 ml

Tiempo:
1 año = 12 meses
1 mes = 30 o 31 días
1 día = 24 h
1 h = 60 min
1 min = 60 s

Moneda (ejemplo genérico):
1 euro = 100 céntimos

Temperatura (conversión):
°F = (°C × 9/5) + 32
°C = (°F - 32) × 5/9

C. Formulario de fórmulas básicas

En aritmética, muchas situaciones se resuelven aplicando fórmulas. Este formulario reúne las más relevantes.

Área del rectángulo: $A = b \times h$
Área del triángulo: $A = (b \times h)/2$
Área del círculo: $A = \pi \times r^2$
Perímetro del rectángulo: $P = 2b + 2h$
Circunferencia: $C = 2\pi r$
Volumen del cubo: $V = a^3$
Volumen del prisma rectangular: $V = b \times h \times l$

Promedio aritmético: (suma de los datos) / (número de datos)
Interés simple: $I = C \times r \times t$
Porcentaje: (parte / total) × 100%

D. Glosario de términos aritméticos

Este glosario presenta definiciones concisas de los conceptos esenciales en aritmética.

Número natural: número entero positivo a partir del 1.
Número primo: número natural mayor que 1 con solo dos divisores positivos.
Múltiplo: número que resulta de multiplicar un número dado por un entero.
Divisor: número que divide exactamente a otro.
Fracción: expresión de la forma a/b que representa una parte de un todo.
Decimal: número con parte fraccionaria expresada en base diez.
Media: valor promedio de un conjunto de datos.
Mínimo común múltiplo (mcm): menor número múltiplo común a dos o más números.
Máximo común divisor (mcd): mayor número que divide exactamente a dos o más números.
Propiedad distributiva: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

E. Soluciones de ejercicios seleccionados

Este anexo contiene los resultados y, en algunos casos, la resolución de ejercicios propuestos a lo largo del libro. Sirve como guía de autoevaluación para el estudiante.

Ejercicio 1.4: $34 + 78 = 112$
Ejercicio 2.7: $45 \times 12 = 540$
Ejercicio 3.9: mcm(12, 18) = 36
Ejercicio 4.2: mcd(24, 60) = 12
Ejercicio 6.3: $3/4 + 2/5 = 23/20 = 1\ 3/20$
Ejercicio 8.5: 25% de 200 = 50
Ejercicio 10.4: Área del círculo con r = 7 cm → $A = \pi \times 49 \approx 153.94$ cm²

Las soluciones seleccionadas permiten comprobar tanto los procedimientos como los resultados, reforzando el aprendizaje autónomo.

F. Bibliografía recomendada

Este apartado incluye una lista de libros y recursos recomendados para ampliar el estudio de la aritmética.

– Baldor, A. *Aritmética*. Editorial Cultural
– Larson, R. & Hostetler, R. *Matemáticas básicas*. McGraw-Hill
– Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas
– Ministerio de Educación. *Currículo oficial de matemáticas para primaria y secundaria*
– Khan Academy: plataforma gratuita de aprendizaje en línea
– OpenStax: *Arithmetic* (libro gratuito en inglés)

La consulta de estas obras amplía el horizonte de aprendizaje, aporta enfoques complementarios y consolida los fundamentos adquiridos.

Epílogo

Al cerrar este libro de matemáticas, no solo terminamos un recorrido por fórmulas, problemas y razonamientos, sino también un viaje hacia el pensamiento lógico, la curiosidad y la comprensión del mundo que nos rodea. Las matemáticas no son simplemente números ni símbolos abstractos: son una herramienta para entender la realidad, para tomar decisiones con criterio, y para resolver problemas tanto sencillos como complejos en nuestra vida diaria.

En cada operación, en cada ejercicio resuelto, se esconde una forma de ver la vida con orden, precisión y belleza. Desde la economía del hogar hasta la arquitectura de nuestras ciudades, desde la música hasta la tecnología, las matemáticas están presentes, casi invisibles, pero imprescindibles. Aprenderlas y enseñarlas no es solo una cuestión académica, sino una manera de crecer como personas libres y críticas.

He querido compartir aquí no solo conocimientos, sino también el espíritu de compartir lo aprendido. Porque el conocimiento, cuando se comparte, se multiplica. Y sobre todo, porque saber nos hace libres: libres para pensar por nosotros mismos, para tomar decisiones responsables, y para imaginar un futuro mejor.

Escribiendo este libro, he recordado con gratitud a una figura clave en mi vida: mi profesor de matemáticas, D. Mateo. Fue él quien me transmitió la pasión por esta disciplina, con una forma de enseñar tan humana como rigurosa, que me marcó para siempre. Este libro es, en parte, un homenaje a su vocación y a su manera de hacer de las matemáticas algo cercano y apasionante.

Tampoco puedo terminar sin mencionar a mi compañera de vida, Marisa. Su apoyo, comprensión y amor incondicional han sido el motor silencioso detrás de cada página. Sin ella, este proyecto no habría sido posible. A ella, con todo mi cariño, va dedicada esta obra.

Gracias por haber llegado hasta aquí. Que este libro sea solo un paso más en el camino del aprendizaje, la libertad y la pasión por saber.